Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт систем информатики
им. А. П. Ершова

Н. С. Грибовская

ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ НА ВРЕМЕННЫХ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЯХ

Препринт
119

Новосибирск 2004

В данной работе вводятся и исследуются временные расширения тестовой эквивалентности и слабой бисимуляции Милнера и Сангиорги для модели временных систем переходов. Данная работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию, грант А04-3.16-217.

Siberian Division of the Russian Academy of Sciences
A. P. Ershov Institute of Informatics Systems

N. S. Gribovskaja

THE CATEGORY THEORETICAL CHARACTERIZATION OF DIFFERENT EQUIVALENCES FOR TIMED AUTOMATA MODELS

Preprint
119

Novosibirsk 2004

The timed extensions of a test equivalence and a weak barbed bisimularity are defined and developed for model of timed transition systems. This work is supported by Federal Agency of education, grant A04-3.16-217.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие методы теории категорий активно используются для описания и изучения параллельных систем и процессов. Категория включает в себя множество моделей и морфизмов между ними, которые представляют собой некоторый вид моделирования. Часто такая теория используется для сравнения различных моделей. Одним из наиболее важных понятий теории параллельного программирования является понятие эквивалентности между процессами. Поведенческие эквивалентности обычно используются при спецификации и верификации с целью сравнения поведения систем, а также упрощения их структуры. Наиболее известными являются два подхода — бисимуляционный [3, 11] и тестовый [2]. Две системы считаются бисимуляционно эквивалентными, если внешний наблюдатель не может обнаружить различий в поведении этих систем. На основе такого понятия эквивалентности была разработана элегантная математическая теория, одно из основных достижений которой — эффективные алгоритмы распознавания бисимуляции для систем с конечным числом состояний. При тестовом подходе поведение системы исследуется посредством набора тестов. При этом процесс выполняется параллельно с тестом, и считается, что процесс должен (или может) пройти тест, если в результате любого (или, соответственно, хотя бы одного) их параллельного выполнения тест может выполнить специальное действие успешного завершения. Два процесса считаются тестово эквивалентными, если они могут или должны проходить один и тот же набор тестов. Такое понятие эквивалентности привело к появлению математической теории, которая естественным образом объединяет эквивалентности и предпорядки. Чтобы облегчить задачу применения тестовых эквивалентностей и предпорядков, были найдены альтернативные характеризации этих понятий. В работе [6] был предложен новый теоретико-категорный подход к исследованию эквивалентностей на примере сильной бисимуляции. В рамках этого подхода эквивалентность представляется конструкцией открытых морфизмов. В дальнейшем этот подход стал использоваться и для определения других эквивалентностей (трассовой, слабой и сильной бисимуляционной, бисимуляционной с сохранением истории и т.д.) [10].

В настоящее время резко возрос интерес к разработке и исследованию распределенных систем, функционирующих в режиме реального времени. Поэтому в литературе были сделаны попытки ввести понятие времени в эквивалентные отношения, чтобы позволить исследовать временные аспекты поведения систем. Так, например, в статье [5] методами теории категорий была решена проблема разрешимости временной сильной бисимуляции для временных систем переходов. Цель данной работы состоит в разработке основы для построения временной тестовой эквивалентности и слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги в контексте временных систем переходов. Первая из исследуемых эквивалентностей формулируется в терминах прохождения одного и того же набора тестов. В данной семантике тест состоит из временного слова и набора временных действий. Считается, что система прошла тест, если после любого выполнения временного слова может выполнится хотя бы одно временное действие из набора. Вторая исследуемая эквивалентность — слабая бисимуляция по Милнеру и Сангиорги — отличается от сильной бисимуляции по следующим аспектам:

— она разработана для временных систем переходов, множество действий которых содержит невидимое действие τ;

— данная бисимуляция требует, чтобы бисимуляционно подобными были только невидимые переходы, т.е. переходы, помеченные действием τ;

— она не моделирует видимые действия, а лишь учитывает факт их существования.

Статья составлена следующим образом. В первом разделе определяется модель временных систем переходов. Второй раздел посвящен исследованию временного варианта тестовой эквивалентности. В разд. 2.1 строится категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{test}$ и исследуются различные свойства этой категории. В разд. 2.2 определяется подкатегория для построенной категории и изучаются соответсвующие этой подкатегории $\mathcal{P}_{test}$-открытые морфизмы. В разд. 2.3 определяется временная тестовая эквивалентность для временных систем переходов и строится ее теоретико-категорная характеризация. В третьем разделе исследуется временной вариант слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги. В разд. 3.1 строится категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ и исследуются различные свойства этой категории. В разд. 3.2 определяется подкатегория для построенной категории и изучаются соответсвующие этой подкатегории $\mathcal{P}_{wbis}$-открытые морфизмы. В разд. 3.3 определяется временная слабая бисимуляция по Милнеру и Сангиорги для временных систем переходов и строится ее теоретико-категорная характеризация. Заключение можно найти в разд. 4.

1. МОДЕЛЬ ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ПЕРЕХОДОВ

В данном разделе описывается модель временных систем переходов. Кроме того, данный раздел содержит ряд полезных определений и обозначений.

Определение 1. *Временная система переходов $\mathcal{T}$ — это набор $(S,\ \Sigma,\ s_0,\ X,\ T)$, где*

- S *— множество состояний, а* s_0 *— начальное состояние,*
- Σ *— конечный алфавит действий,*
- X *— множество временных переменных,*
- T *— множество переходов таких, что* $T \subseteq S \times \Sigma \times \Delta \times 2^X \times S$. *Здесь* Δ *— временная конструкция, построенная по правилу:* $\Delta ::= c \# x \mid x + c \ \# y \mid \Delta \wedge \Delta$, *где* $\# \in \{\leq, <, \geq, >, =\}$, c *— положительная вещественная постоянная, а* x, y *— временные переменные.*

Переход $(s, \sigma, \delta, \lambda, s')$ *будем обозначать* $s \xrightarrow[\delta,\ \lambda]{\sigma} s'$.

На рисунках состояния временной системы переходов будут изображаться кругами, при этом начальное состояние будет помечаться двойным кругом. Переходы между состояниями будут изображаться стрелками. Каждая стрелка будет помечаться действием, временной конструкцией и множеством временных переменных.

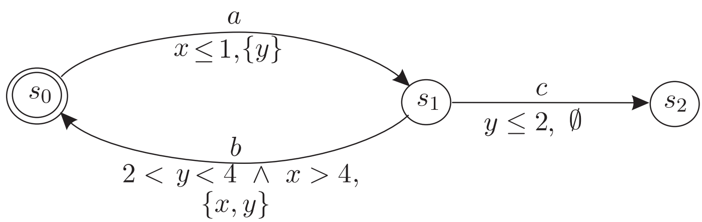


Рис. 1. Временная система переходов $\mathcal{T}_1$

Пример 1. *На рис. 1 изображена временная система переходов* $\mathcal{T}_1$, *в которой множество временных переменных* X_1 *состоит из двух* *переменных x и y, а алфавит действий Σ_1 содержит три действия: a, b и c.*

Чтобы объяснить поведение временной системы переходов, приведем ряд полезных понятий. Множество вещественных положительных чисел будем обозначать как $\mathbf{R}^+$, а множество натуральных чисел — как $\mathbf{N}$.

Определение 2. *Временным словом над алфавитом Σ называется конечная последовательность $\alpha = (\sigma_1, \tau_1)\ (\sigma_2, \tau_2)\ (\sigma_3, \tau_3)\ \ldots\ (\sigma_n, \tau_n)$, где для любого $0 \leq i \leq n$ $\sigma_i \in S$, $\tau_i \in \mathbf{R}^+$ и, кроме того, $\tau_i < \tau_{i+1}$.*

Определение 3. *Временным прогрессом называется функция $\nu : X \to \mathbf{R}^+$, которая каждой временной переменной системы сопоставляет конкретный момент времени. Определим временную функцию прогресса $(\nu + c)(x) := \nu(x) + c$ для любой временной переменной $x \in X$. Пусть λ — множество временных переменных, тогда*

$$\nu[\lambda \to 0](x) = \begin{cases} 0 & \textit{для } x \in \lambda, \\ \nu(x) & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Будем говорить, что временная конструкция δ выполнена для временной функции прогресса ν тогда и только тогда, когда выражение $\delta[\nu(x)/x]$ истинно. Здесь запись $\delta[y/x]$ означает синтаксическую замену переменной x на y в конструкции δ. Временная конструкция δ определяет подмножество в множестве $\mathbf{R}^m$ (m — число временных переменных в множестве X). Будем называть это подмножество δ-подмножеством и обозначать $\|\delta\|_X$. Временная функция прогресса ν определяет точку в множестве $\mathbf{R}^m$ (обозначается $\|\nu\|_X$). Таким образом, временная конструкция δ выполнена для временной функции прогресса ν тогда и только тогда, когда $\|\nu\|_X \in \|\delta\|_X$.

Определение 4. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \Sigma, s_0, X, T)$ — временная система переходов. Тогда конфигурацией $\mathcal{T}$ называется пара $\langle s, \nu \rangle$, где s — состояние, а ν — временная функция прогресса. Конфигурация $C_0(\mathcal{T}) = \langle s_0, \nu_0 \rangle$, где ν_0 — нулевая постоянная функция, называется начальной конфигурацией. Множество всех конфигураций временной системы переходов $\mathcal{T}$ обозначим через $Conf(\mathcal{T})$.*

Будем говорить, что во временной системе переходов $\mathcal{T}$ существует последовательность выполнения $\langle s_0, \nu_0 \rangle \overset{\sigma_1}{\underset{\tau_1}{\to}} \langle s_1, \nu_1 \rangle \overset{\sigma_2}{\underset{\tau_2}{\to}} \ldots \overset{\sigma_n}{\underset{\tau_n}{\to}} \langle s_n, \nu_n \rangle$ тогда и только тогда, когда для любого $i > 0$ существует *переход* $s_{i-1} \underset{\delta_i,\ \lambda_i}{\overset{\sigma_i}{\rightarrow}} s_i$ *такой, что* $\|\nu_{i-1} + (\tau_i - \tau_{i-1})\|_X \in \|\delta_i\|_X$ *и* $\nu_i = (\nu_{i-1} + (\tau_i - \tau_{i-1}))[\lambda_i \to 0]$. *Здесь* s_0 — *начальное состояние,* ν_0 — *нулевая постоянная функция и* τ_0 *равно 0. Эта последовательность выполнения порождает временное слово* $\alpha = (\sigma_1, \tau_1)\ (\sigma_2, \tau_2)\ (\sigma_3, \tau_3) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$.

Языком временной системы переходов $\mathcal{T}$ *называется множество* $L(\mathcal{T}) = \{\ \alpha = (\sigma_1, \tau_1)\ (\sigma_2, \tau_2) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \mid$ *существует последовательность выполнения* $\langle s_0, \nu_0\rangle \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\rightarrow}} \langle s_1, \nu_1\rangle \underset{\tau_2}{\overset{\sigma_2}{\rightarrow}} \ldots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\rightarrow}} \langle s_n, \nu_n\rangle\ \}$.

Пример 2. *Множество* $L(\mathcal{T}_1) = \{\alpha \mid \alpha\omega = (a, \tau_0)\ (b, \tau_1)\ (a, \tau_2) \ldots (b, \tau_{2l-1})\ (a, \tau_{2l})\ (c, \tau),\ l \in \mathbf{N},\ \tau_{-1} = 0,\ \tau_0 \le 1,\ \tau_{2k} - \tau_{2k-1} \le 1,\ 2 < \tau_{2k-1} - \tau_{2k-2} < 4,\ \tau_{2k-1} - \tau_{2k-3} > 4,\ \tau - \tau_{2k} \le 2,\ k = 1..l\}$ *является языком временной системы переходов* $\mathcal{T}_1$, *изображенной на рис. 1.*

2. ВРЕМЕННАЯ ТЕСТОВАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

2.1. Категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{test}$

Перед тем как построить категорию временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{test}$, состоящую из временных систем переходов и ts-морфизмов между ними, приведем ряд полезных определений.

Определение 5. *Пусть* $\mathcal{T} = (S, \Sigma, s_0, X, T)$ — *временная система переходов.*

Для непустых множеств $p, q \subseteq Conf(\mathcal{T})$ *будем писать* $p \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightarrow}} q$, *если* $q = \{\langle s', \nu'\rangle \in Conf(\mathcal{T}) \mid \exists \langle s, \nu\rangle \in p\ \ \langle s, \nu\rangle \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightarrow}} \langle s', \nu'\rangle\}$.

Определим множество $RS(\mathcal{T})$ *как наименьшее подмножество множества* $2^{Conf(\mathcal{T})} \setminus \{\emptyset\}$ *такое, что*

- $\{C_0(\mathcal{T})\} \in RS(\mathcal{T})$;
- *если* $p \in RS(\mathcal{T})$ *и* $p \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightarrow}} q$, *то* $q \in RS(\mathcal{T})$.

Для любой конфигурации $\langle s, \nu\rangle$ *определим множество* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\langle s, \nu\rangle) = \{(\sigma, \tau) \in \Sigma \times \mathbf{R}^+ \mid \exists \langle s', \nu'\rangle \in Conf(\mathcal{T})\ \ \langle s, \nu\rangle \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightarrow}} \langle s', \nu'\rangle\}$.

Для любого множества $p \in RS(\mathcal{T})$ *зададим множество* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(p) = \{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\langle s, \nu\rangle) \mid \langle s, \nu\rangle \in p\}$.

Пример 3. *Чтобы проиллюстрировать определенные выше понятия, рассмотрим временную систему переходов* $\mathcal{T}_1$, *изображенную на рис. 1. Для этой системы получаем, что* $RS(\mathcal{T}_1) = \{\{\langle s_0, \nu_0\rangle\},$

$\{\langle s_1,\nu_1\rangle\}$, $\{\langle s_2,\nu_2\rangle\} \mid \nu_0(x)=\nu_0(y)=0,\ \nu_1(x)\le 1,\ \nu_1(y)=0,\ \nu_2(x)\le 3,$ $\nu_2(y)\le 2\}$. *Кроме того, имеем, что* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\langle s_0,\nu_0\rangle)=\{(a,t)\mid (t\le 1)\vee(4< t\le 5)\vee(8<t\le 9)\vee\ldots\}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\langle s_1,\nu_1\rangle)=\{(b,t),(c,t')\mid(2<t<4)\vee(6< t<9)\vee(10<t<13)\vee\ldots,\ (t'\le 3)\vee(4<t'\le 7)\vee(8<t'\le 11)\vee\ldots\}$ *и* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\langle s_2,\nu_2\rangle)=\emptyset$.

Теперь приведем определение ts-морфизма.

Определение 6. *Пусть* $\mathcal{T}=(S,\Sigma,s_0,X,T)$, $\mathcal{T}'=(S',\Sigma,s_0',X',T')$ *— две временные системы переходов. Отображение* μ *называется ts-морфизмом между* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{T}'$, *если* $\mu: RS(\mathcal{T})\to RS(\mathcal{T}')$ *такое, что*

- $\mu(\{C_0(\mathcal{T})\})=\{C_0(\mathcal{T}')\}$;
- *если* $p_1 \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\to}} p_2$, *то* $\mu(p_1) \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\to}} \mu(p_2)$;
- *для любого множества* $A'\in\mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu(p))$ *существует множество* $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(p)$ *такое, что* $A\subseteq A'$.

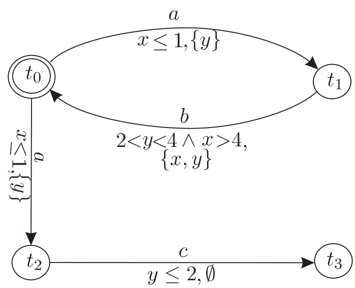


Рис. 2. Временная система переходов $\mathcal{T}_2$

Пример 4. *Для временной системы переходов* $\mathcal{T}_2$, *изображенной на рис. 2, выполнено следующее:* $RS(\mathcal{T}_2)=\{\{\langle t_0,\nu_0'\rangle\},\ \{\langle t_1,\nu_1'\rangle,\langle t_2,\nu_1'\rangle\},$ $\{\langle t_3,\nu_2'\rangle\}\mid \nu_0'(x)=\nu_0'(y)=0,\ \nu_1(x)\le 1,\ \nu_1(y)=0,\ \nu_2(x)\le 3,\ \nu_2(y)\le 2\}$. *Кроме того,* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\langle t_0,\nu_0'\rangle)=\{(a,t)\mid(t\le 1)\vee(4<t\le 5)\vee(8<t\le 9)\vee\ldots\}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\langle t_1,\nu_1'\rangle)=\{(b,t)\mid(2<t<4)\vee(6<t<9)\vee(10<t<13)\vee\ldots\}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\langle t_2,\nu_1'\rangle)=\{(c,t)\ (t\le 3)\vee(4<t\le 7)\vee(8<t\le 11)\vee\ldots\}$ *и* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\langle t_3,\nu_2'\rangle)=\emptyset$. *Отсюда очевидно, что отображение* μ_1 *такое, что* $\mu_1(\{\langle t_0,\nu_0'\rangle\})=\{\langle s_0,\nu_0\rangle\}$, $\mu_1(\{\langle t_1,\nu_1'\rangle,\langle t_2,\nu_1'\rangle\})=\{\langle s_1,\nu_1\rangle\}$ *и* $\mu_1(\{\langle t_3,\nu_2'\rangle\})=\{\langle s_2,\nu_2\rangle\}$ *является ts-морфизмом между временными системами переходов* $\mathcal{T}_2$, *изображенной на рис. 2, и* $\mathcal{T}_1$, *изображенной на рис. 1.*

Теперь приведем формальное определение категории временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{test}$.

Определение 7. *Категория $\mathcal{CTTS}_{test}$ содержит временные системы переходов и ts-морфизмы, определенные выше. При этом композиция ts-морфизмов $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ и $\mu' : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ определена как обычная композиция функций, а тождественный ts-морфизм — это тождественная функция.*

Утверждение 1. *Категория $\mathcal{CTTS}_{test}$ определена корректно.*

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что тождественный ts-морфизм и композиция двух ts-морфизмов действительно являются ts-морфизмами. $\square$.

Категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{test}$ обладает таким полезным свойством, как коуниверсальность (pullbacks).

Определение 8. *Категория $\mathcal{M}$ называется коуниверсальной, если для любой конструкции морфизмов $T_1 \overset{\mu_1}{\to} T_0 \overset{\mu_2}{\leftarrow} T_2$ существует конструкция $T_1 \overset{\pi_1}{\leftarrow} T \overset{\pi_2}{\to} T_2$ такая, что*

- $\mu_1 \circ \pi_1 = \mu_2 \circ \pi_2$*;*
- *для любой конструкции $T_1 \overset{\phi_1}{\leftarrow} T' \overset{\phi_2}{\to} T_2$ такой, что $\mu_1 \circ \phi_1 = \mu_2 \circ \phi_2$, существует морфизм $\xi : T' \to T$ такой, что $\phi_1 = \pi_1 \circ \xi$ и $\phi_2 = \pi_2 \circ \xi$.*

Докажем коуниверсальность категории $\mathcal{CTTS}_{test}$.

Теорема 1. *Категория $\mathcal{CTTS}_{test}$ коуниверсальна в соответствии с определением 8.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_1 = (S_1, \Sigma, s_0^1, X_1, T_1)$, $\mathcal{T}_2 = (S_2,\ \Sigma,\ s_0^2,\ X_2,\ T_2)$ — две временные системы переходов и пусть $\mathcal{T}_1 \overset{\mu_1}{\to} \mathcal{T}_0 \overset{\mu_2}{\leftarrow} \mathcal{T}_2$ — конструкция ts-морфизмов в категории $\mathcal{CTTS}_{test}$. Построим временную систему переходов $\mathcal{T} = (S, \Sigma, s_0, X, T)$ следующим образом:

- $X = \{u\}$;
- $s_0 = (\{C_0(\mathcal{T}_1)\},\ \{C_0(\mathcal{T}_2)\},\ \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\{C_0(\mathcal{T}_1)\}) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\{C_0(\mathcal{T}_2)\}))$;
- S — наименьшее подмножество множества $RS(\mathcal{T}_1) \times RS(\mathcal{T}_2) \times 2^{(\Sigma \times \mathbf{R}^+)}$, удовлетворяющее следующим условиям:
  - $s_0 \in S$;
  - пусть $(p, q, D) \in S$ и пусть $(\sigma, \tau) \in D$, $p \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\to}} p'$ и $q \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\to}} q'$. Тогда $(p', q', D') \in S$ для всех $D' \in M(p', q')$. Здесь множество

$M(p',q') = \{A' \cap (\bigcup_{B' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q')} B') \mid A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p')\} \cup \{B' \cap (\bigcup_{A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p')} A') \mid B' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q')\}$;

- $((p,q,D),\sigma,(u=\tau),\emptyset,(p',q',D')) \in T \Leftrightarrow (\sigma,\tau) \in D$, $p \xrightarrow[\tau]{\sigma} p'$, $q \xrightarrow[\tau]{\sigma} q'$ и $D' \in M(p',q')$.

По построению очевидно, что $\mathcal{T}$ является временной системой переходов. Кроме того, легко проверить, что построенная временная система переходов обладает следующими свойствами.

- Пусть $(p,q,D) \in S$, тогда $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\langle(p,q,D),\nu\rangle) = D$ для любой временной функции прогресса ν.
- $L(\mathcal{T}) = L(\mathcal{T}_1) \cap L(\mathcal{T}_2)$.
- Пусть $Z \in RS(\mathcal{T})$. Тогда существуют множества $p \in RS(\mathcal{T}_1)$ и $q \in RS(\mathcal{T}_2)$ и функция ν такие, что $Z = \{\langle(p,q,D),\nu\rangle \mid D \in M(p,q)\}$ и $\nu(u) = \tau$.

Пусть $Z \in RS(\mathcal{T})$. По доказанному выше $Z = \{\langle(p,q,D),\nu\rangle \mid D \in M(p,q)\}$. Определим отображения $\pi_i : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_i$ $(i = 1,2)$ следующим образом: $\pi_1(Z) = p$ и $\pi_2(Z) = q$. Проверка того, что π_1 и π_2 являются ts-морфизмами, очевидна.

Из определения ts-морфизма и множества $RS(\mathcal{T})$ легко видеть, что ts-морфизм является взаимооднозначным отображением. Отсюда с учетом того, что μ_1, μ_2, π_1 и π_2 — ts-морфизмы, получаем, что $\mu_1 \circ \pi_1 = \mu_2 \circ \pi_2$.

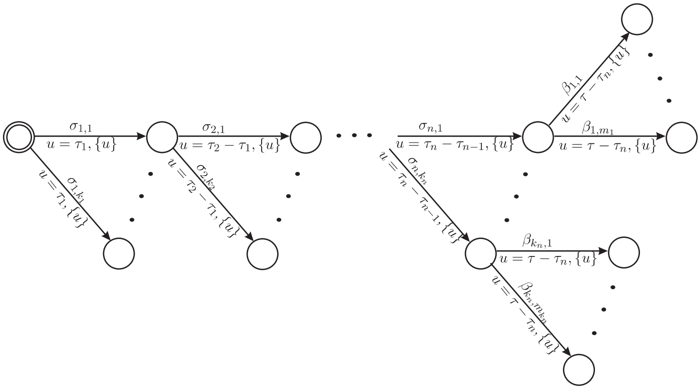
Теперь пусть $\mathcal{T}_1 \overset{\phi_1}{\leftarrow} \mathcal{T}' \overset{\phi_2}{\rightarrow} \mathcal{T}_2$ — конструкция ts-морфизмов, удовлетворяющая условию: $\mu_1 \circ \phi_1 = \mu_2 \circ \phi_2$. Кроме того, пусть $V \in RS(\mathcal{T}')$ такое, что $\{C_0(\mathcal{T}')\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} V$. Тогда определим отображение $\xi : RS(\mathcal{T}') \to RS(\mathcal{T})$ по правилу $\xi(V) = \{\langle(\phi_1(V),\phi_2(V),D),\nu\rangle \mid D \in M(\phi_1(V),\phi_2(V)),\ \nu(u) = \tau_n\}$. Нетрудно проверить, что определенное отображение является ts-морфизмом.

Равенства $\phi_1 = \pi_1 \circ \xi$ и $\phi_2 = \pi_2 \circ \xi$ следуют из определения ts-морфизмов ξ, π_1 и π_2. $\square$

2.2. $\mathcal{P}_{test}$-открытые морфизмы

Выделим подкатегорию $\mathcal{P}_{test}$ в категории $\mathcal{CTTS}_{test}$.

Определение 9. *Подкатегория $\mathcal{P}_{test}$ в категории $\mathcal{CTTS}_{test}$ содержит наблюдения, т.е. временные системы переходов вида*



и ts-морфизмы между ними.

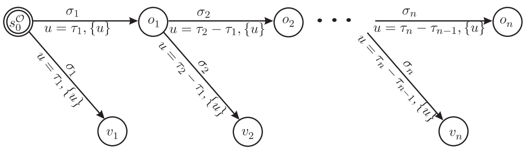
В соответствии с теоретико-категорным понятием открытого морфизма определим $\mathcal{P}_{test}$-открытые морфизмы. Наша дальнейшая цель — дать характеризацию $\mathcal{P}_{test}$-открытости для ts-морфизмов.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \Sigma, s_0, X, T)$, $\mathcal{T}' = (S', \Sigma, s_0', X', T')$ — две временные системы переходов, а $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — ts-морфизм между ними. ts-морфизм μ является $\mathcal{P}_{test}$-открытым морфизмом тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

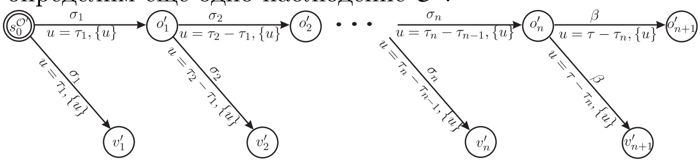
- *если $\mu(p_1) \overset{\beta}{\underset{\tau}{\to}} q_2$, то существует $p_2 \in RS(\mathcal{T})$ такое, что $p_1 \overset{\beta}{\underset{\tau}{\to}} p_2$ и $\mu(p_2) = q_2$;*
- *для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(p_1)$ существует множество $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu(p_1))$ такое, что $A' \subseteq A$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ $\mathcal{P}_{test}$-открытый морфизм. Проверим выполнение первого условия теоремы.

Пусть $\mu(p_1) \overset{\beta}{\underset{\tau}{\to}} q_2$. По определению ts-морфизма получаем, что $p_1 \in RS(\mathcal{T})$. Тогда по построению множества $RS(\mathcal{T})$ получаем существование последовательности $p^0 \overset{\sigma_1}{\underset{\tau_1}{\to}} p^1 \overset{\sigma_2}{\underset{\tau_2}{\to}} \cdots \overset{\sigma_n}{\underset{\tau_n}{\to}} p^n$ такой, что $p^0 = \{C_0(\mathcal{T})\}$, а $p^n = p_1$. Обозначим через q^i множества $\mu(p^i)$ для $i \in \{0..n\}$, и пусть $q^{n+1} = q_2$. Определим наблюдение $\mathcal{O}$ следующим образом.



Для лучшего понимания этого наблюдения приведем множество $RS(\mathcal{O}) = \{Z_0, Z_1, \ldots, Z_n \mid Z_0 = \{C_0(\mathcal{O})\}, Z_i = \{\langle o_i, \nu_i\rangle, \langle v_i, \nu_i\rangle\}\ (i = 1..n)$, $\nu_1(u) = \tau_1,\ \nu_j(u) = \tau_j - \tau_{j-1}\ (j = 2..n)\}$. Из определения очевидно, что $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(Z_{i-1}) = \{\{(\sigma_i, \tau_i)\}, \emptyset\}$, $i = 1..n$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(Z_n) = \{\emptyset\}$.
Теперь определим еще одно наблюдение $\mathcal{O}'$.



Для этого наблюдения $RS(\mathcal{O}') = \{Z_0', Z_1', \ldots, Z_n', Z_{n+1}' \mid Z_0' = \{C_0(\mathcal{O}')\}$, $Z_i' = \{\langle o_i', \nu_i'\rangle, \langle v_i', \nu_i'\rangle\}\ (i = 1\ldots(n+1))$; $\nu_1'(u) = \tau_1,\ \nu_j'(u) = \tau_j - \tau_{j-1}$ $(j = 2\ldots n)$, $\nu_{n+1}'(u) = \tau - \tau_n\}$. По построению $\mathcal{O}'$ получаем, что $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}(Z_{i-1}') = \{\{(\sigma_i, \tau_i)\}, \emptyset\}$, $i = 1..n$, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}(Z_n') = \{\{(\beta, \tau)\}, \emptyset\}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{O}'}(Z_{n+1}') = \{\emptyset\}$.

Определим ts-морфизм $\mu_1 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ по правилу $\mu_1(Z_i) = Z_i'$ для любого $i \in \{0..n\}$. Заметим, что определенные отображения μ_1 и μ_2 являются ts-морфизмами.

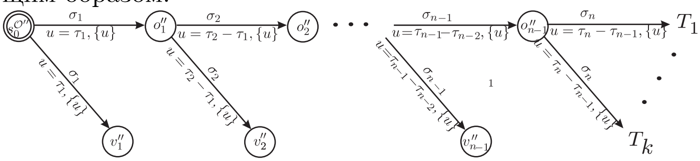
Определим еще два ts-морфизма: $\mu_2 : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$, действующий по правилу $\mu_2(Z_i) = p^i$ для любого $i \in \{0..n\}$, и $\mu_3 : \mathcal{O}' \to \mathcal{T}'$, действующий по правилу $\mu_3(Z_i') = q^i$ для любого $i \in \{0..(n+1)\}$. Проверка того, что эти два отображения являются ts-морфизмами очевидна.

Кроме того, по определению ts-морфизмов очевидно, что $\mu \circ \mu_2 = \mu_3 \circ \mu_1$. Так как μ — $\mathcal{P}_{test}$-открытый морфизм, то существует ts-морфизм $\widetilde{\mu} : \mathcal{O}' \to \mathcal{T}$ такой, что $\mu_2 = \widetilde{\mu} \circ \mu_1$ и $\mu_3 = \mu \circ \widetilde{\mu}$.

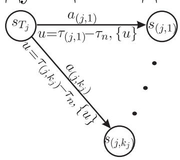
Теперь имеем $\widetilde{\mu}(Z_n') = \widetilde{\mu}(\mu_1(Z_n)) = \mu_2(Z_n) = p^n = p_1$. Далее, так как $Z_n' \xrightarrow[\tau]{\beta} Z_{n+1}'$ и $\widetilde{\mu}$ — ts-морфизм, то $\widetilde{\mu}(Z_{n+1}') \in RS(\mathcal{T}')$ и $\widetilde{\mu}(Z_n') \xrightarrow[\tau]{\beta} \widetilde{\mu}(Z_{n+1}')$. Кроме того, очевидно, что $\mu(\widetilde{\mu}(Z_{n+1}')) = \mu_3(Z_{n+1}') = q^{n+1} = q_2$. Пусть $p_2 = \widetilde{\mu}(Z_{n+1}')$. Тогда ясно, что $p_1 \xrightarrow[\tau]{\beta} p_2$ и $\mu(p_2) = q_2$, что и требовалось доказать.

Осталось проверить выполнение второго условия теоремы.

Пусть $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(p_1)$. Как и ранее, по определению ts-морфизма и по построению множества $RS(\mathcal{T})$ получаем существование последовательности $p^0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} p^1 \xrightarrow[\tau_2]{\sigma_2} \cdots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} p^n$ такой, что $p^0 = \{C_0(\mathcal{T})\}$, а $p^n = p_1$. Обозначим через q^i множества $\mu(p^i)$ для $i \in \{0..n\}$. Определим наблюдение $\mathcal{O}$, так же как и выше. Пусть $\mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(q^n) = \{A_1, \dots, A_k\}$ и пусть $A_j = \{(a_{(j,1)}, \tau_{(j,1)}) \dots, (a_{(j,k_j)}, \tau_{(j,k_j)})\}$. Определим наблюдение $\mathcal{O}''$ следующим образом:



Здесь T_j $(j = 1..k)$ имеет следующий вид:



Пусть $\bigcup\limits_{j=1}^{k} A_j = \{(\alpha^1, \tau^1), \dots, (\alpha^l, \tau^l)\}$. Определим Z_i^* как максимальные подмножества множества $\{\langle s_{(i,j)}, \nu''_{(i,j)}\rangle \mid \nu''_{i,j}(u) = \tau_{(i,j)} - \tau_n,\ i = 1..k,\ j = 1..k_i\}$ такие, что $\{\langle s_{T_1}, \nu''_n\rangle, \dots, \langle s_{T_k}, \nu''_n\rangle\} \xrightarrow[\tau^i]{\alpha^i} Z_i^*$ $(i = 1..l)$. Тогда получаем, что $RS(\mathcal{O}'') = \{Z''_0, Z''_1, \dots, Z''_n, Z_1^*, \dots, Z_l^* \mid Z''_0 = \{C_0(\mathcal{O}'')\}$; $Z''_i = \{\langle o''_i, \nu''_i\rangle, \langle v''_i, \nu''_i\rangle\}$ $(i = 1 \dots (n-1))$; $Z''_n = \{\langle s_{T_1}, \nu''_n\rangle, \dots, \langle s_{T_k}, \nu''_n\rangle\}$; $\nu''_1(u) = \tau_1,\ \nu''_j(u) = \tau_j - \tau_{j-1},\ (j = 2..n))\}$. По построению $\mathcal{O}''$ имеем, что $\mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z''_{i-1}) = \{\{(\sigma_i, \tau_i)\}, \emptyset\}$ $(i = 1..n)$, $\mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z''_n) = \{A_1, \dots, A_k\} = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(q^n)$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z_i^*) = \{\emptyset\}$ $(i = 1..l)$.

Определим ts-морфизм $\mu'_1 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}''$ следующим образом: $\mu'_1(Z_i) = Z''_i$ для любого $i \in \{0..n\}$. Теперь определим отображение $\mu'_3 : RS(\mathcal{O}'') \to RS(\mathcal{T}')$. Пусть $\mu'_3(Z''_i) = q^i$ для любого $i \in \{0..n\}$. Так как $\mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z''_n) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(q^n)$, то для любой пары (α^i, τ^i) существует $q_i^* \in RS(\mathcal{T}')$ такое, что $q_n \xrightarrow[\tau^i]{\alpha^i} q_i^*$. Тогда пусть $\mu'_3(Z_i^*) = q_i^*$ для любого $1 \in \{1..l\}$. Нетрудно доказать, что определенные выше отображения являются ts-морфизмами.

Пусть ts-морфизм $\mu_2 : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$ как и ранее действует по следующему правилу $\mu_2(Z_i) = p^i$ для любого $i \in \{0..n\}$.

По построению очевидно, что $\mu \circ \mu_2 = \mu'_3 \circ \mu'_1$. Так как μ — $\mathcal{P}_{test}$-открытый морфизм, то существует ts-морфизм $\overline{\mu} : \mathcal{O}'' \to \mathcal{T}$ такой, что $\mu_2 = \overline{\mu} \circ \mu'_1$ и $\mu'_3 = \mu \circ \overline{\mu}$.

Теперь имеем $\overline{\mu}(Z''_n) = \overline{\mu}(\mu'_1(Z_n)) = \mu_2(Z_n) = p^n = p_1$. По условию теоремы $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(p_1)$. Так как $\overline{\mu}$ — ts-морфизм, то существует множество $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z''_n)$ такое, что $A' \subseteq A$. Но $\mathcal{A}_{\mathcal{O}''}(Z''_n) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(q^n) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu(p_1))$. Следовательно, мы показали, что существует множество $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu(p_1))$ такое, что $A' \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Пусть выполнены оба условия теоремы, докажем, что μ — $\mathcal{P}_{test}$-открытый морфизм. Пусть даны следующие ts-морфизмы: $\mu_1 : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ в подкатегории $\mathcal{P}_{test}$ и $\mu_2 : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{T}$, $\mu_3 : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{T}'$ и $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ в категории $\mathcal{CTTS}_{test}$ такие, что $\mu \circ \mu_2 = \mu_3 \circ \mu_1$.

Определим отображение $\mu' : RS(\mathcal{O}_2) \to RS(\mathcal{T})$ следующим образом.

- $\mu'(\{C_0(\mathcal{O}_2)\}) = \{C_0(\mathcal{T})\}$.
- Пусть $\mu'(Z)$ уже определено, $Z \xrightarrow[\tau]{\sigma} Z'$ и $\mu'(Z')$ еще не определено. Тогда определим $\mu'(Z')$ следующим образом. По индукции предположим, что $\mu(\mu'(Z)) = \mu_3(Z)$. Так как μ_3 — ts-морфизм, то $\mu_3(Z) \xrightarrow[\tau]{\sigma} \mu_3(Z')$. Тогда по первому условию теоремы получаем существование $p \in RS(\mathcal{T})$ такого, что $\mu'(Z) \xrightarrow[\tau]{\sigma} p$ и $\mu(p) = \mu_3(Z')$. По определению множества $RS(\mathcal{T})$ получаем, что такое множество $p \in RS(\mathcal{T})$ единственно. Определим $\mu'(Z') = p$. Заметим, что по второму условию теоремы для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\mu'(Z'))$ существует множество $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu(\mu'(Z'))) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu_3(Z'))$ такое, что $A' \subseteq A$. Но μ_3 является ts-морфизмом, поэтому для любого $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}'}(\mu_3(Z'))$ существует множество $A'' \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}_2}(Z')$ такое, что $A'' \subseteq A'$.

Таким образом, по построению отображения μ' очевидно, что μ' — ts-морфизм. Также по построению ясно, что $\mu_3 = \mu \circ \mu'$. Отсюда с учетом коммутативности диаграммы получаем $\mu \circ \mu_2 = \mu \circ (\mu' \circ \mu_1)$. По определению множеств $RS(\mathcal{T})$ и $RS(\mathcal{T}')$, а также по определению ts-морфизма μ получаем, что μ является взаимооднозначным отображением. Тогда имеем, что $\mu_2 = \mu' \circ \mu_1$. Таким образом, показано, что μ является $\mathcal{P}_{test}$-открытым морфизмом. $\square$.

Пример 5. *Согласно только что доказанной теореме получаем, что ts-морфизм μ_1, определенный в примере 4, не является $\mathcal{P}_{test}$-открытым морфизмом, так как для $A = \{(b,t) \mid (2 < t < 4) \vee (6 < t < 9) \vee (10 < t < 13) \vee \ldots\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(\{\langle t_1, \nu'_1\rangle, \langle t_2, \nu'_1\rangle\})$ не существует $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\{\langle s_1, \nu_1\rangle\}) = \{\{(b,t),(c,t') \mid (2 < t < 4) \vee (6 < t < 9) \vee (10 < t < 13) \vee \ldots,\ (t' \le 3) \vee (4 < t' \le 7) \vee (8 < t' \le 11) \vee \ldots\}\}$ такого, что $A' \subseteq A$.*

2.3. Теоретико-категорная характеризация

Определим временной вариант тестовой эквивалентности для временных систем переходов.

Определение 10. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ. Будем говорить, что $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ тестово эквивалентны (и обозначать $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$) тогда и только тогда, когда для любого временного слова $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ и любого подмножества $L \subseteq (\Sigma \times \mathbf{R}^+)$ выполнено:*

$$\mathcal{T}_1 \textbf{ after } (\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \textbf{ MUST } L \iff \mathcal{T}_2 \textbf{ after } (\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \textbf{ MUST } L,$$

*здесь запись $\mathcal{T}_i$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L $(i = 1, 2)$ означает, что для любого $\langle s, \nu \rangle \in Conf(\mathcal{T}_i)$ такого, что $C_0(\mathcal{T}_i) \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\rightarrow}} \ldots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\rightarrow}} \langle s, \nu \rangle$, существуют $(a, \tau) \in L$ и $\langle s', \nu' \rangle \in Conf(\mathcal{T}_i)$ такие, что $\langle s, \nu \rangle \underset{\tau}{\overset{a}{\rightarrow}} \langle s', \nu' \rangle$.*

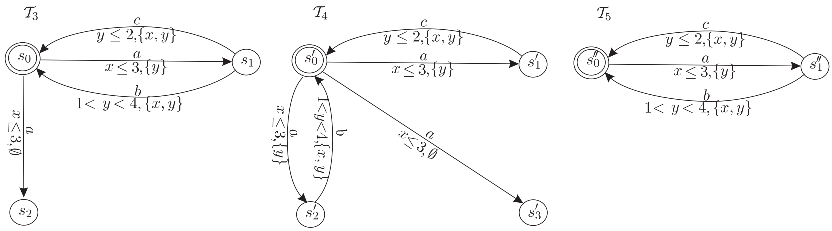


Рис. 3. Временные системы переходов $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$ и $\mathcal{T}_5$

Пример 6. *Временные системы переходов $\mathcal{T}_3$ и $\mathcal{T}_4$, изображенные на рис. 3, являются тестово эквивалентными, а временные системы переходов $\mathcal{T}_4$ и $\mathcal{T}_5$, изображенные на этом же рисунке, — нет, так как $\mathcal{T}_5$* **after** $(a, 1)$ **MUST** $\{(c, 2)\}$, *что не верно для временной системы переходов $\mathcal{T}_4$.*

Основной результат данного раздела заключается в том, что определенная выше тестовая эквивалентность совпадает с $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляцией, определяемой по подкатегории $\mathcal{P}_{test}$ стандартным способом.

Приведем формальное определение $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляции.

Определение 11. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ. Будем говорить, что $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляционны (и обозначать $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{test}} \mathcal{T}_2$) тогда и только тогда,* *когда существует конструкция $\mathcal{P}_{test}$-открытых морфизмов вида $\mathcal{T}_1 \xleftarrow{\mu_1} \mathcal{T} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{T}_2$.*

Утверждение 2. *Определенная выше $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляция действительно является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Следует из коуниверсальности категории $\mathcal{CTTS}_{test}$. $\square$.

Докажем основную теорему этого раздела.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ. Тогда $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{test}} \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{test}} \mathcal{T}_2$. Тогда по определению $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляции получаем существование конструкции $\mathcal{P}_{test}$-открытых морфизмов $\mathcal{T}_1 \xleftarrow{\mu_1} \mathcal{T} \xrightarrow{\mu_2} \mathcal{T}_2$.

Сначала докажем, что $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}$. Пусть $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n)$ — некоторое временное слово, а $L \subseteq (\Sigma \times \mathbf{R}^+)$. Проверим, что $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** $L \iff \mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L.

Пусть $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L. Рассмотрим два возможных случая.

- $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$. Отсюда получаем, что в $\mathcal{T}_1$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}_1) \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\to}} \dots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\to}} \langle s, \nu \rangle$. Определим множества p_i $(i = 0..n)$ следующим образом: $p_0 = \{C_0(\mathcal{T}_1)\}$, $p_i = \{\langle s', \nu' \rangle \mid \exists \langle s, \nu \rangle \in p_{i-1} \quad \langle s, \nu \rangle \underset{\tau_i}{\overset{\sigma_i}{\to}} \langle s', \nu' \rangle\}$. Очевидно, что для любого $i = 0..n$ $p_i \neq \emptyset$. По определению множества $RS(\mathcal{T}_1)$ получаем, что p_i $(i = 0..n) \in RS(\mathcal{T}_1)$ и $p_0 \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\to}} \dots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\to}} p_n$. Так как ts-морфизм μ_1 $\mathcal{P}_{test}$-открыт, то существуют $q_i \in RS(\mathcal{T})$ $(i = 0..n)$ такие, что $\mu_1(q_i) = p_i$ $(i = 0..n)$ и $q_0 \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\to}} \dots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\to}} q_n$. Так как $q_i \in RS(\mathcal{T})$ $(i = 0..n)$, то для любого $i = 0..n$ $q_i \neq \emptyset$, т. е. для любого q_i существует конфигурация $\langle s_i, \nu_i \rangle \in q_i$. По определению отношения $\underset{\tau}{\overset{\sigma}{\to}}$ на множестве $RS(\mathcal{T})$ получаем, что $\langle s_0, \nu_0 \rangle \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\to}} \dots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\to}} \langle s_n, \nu_n \rangle$. Это означает, что $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T})$.
  Так как $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \dots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L, то это означает, что для любой конфигурации $\langle s, \nu \rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такой, что $C_0(\mathcal{T}_1) \underset{\tau_1}{\overset{\sigma_1}{\to}} \dots \underset{\tau_n}{\overset{\sigma_n}{\to}} \langle s, \nu \rangle$, существуют $(a, \tau) \in L$ и $\langle s', \nu' \rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такие, что $\langle s, \nu \rangle \underset{\tau}{\overset{a}{\to}} \langle s', \nu' \rangle$. Другими словами, это означает, что $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\langle s, \nu \rangle) \cap L \neq \emptyset$. По определению множества p_n получаем, что

если $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$, то $\langle s, \nu \rangle \in p_n$. Таким образом, имеем, что для любого множества $A_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p_n)$ $A_1 \cap L \neq \emptyset$. Так как μ_1 — $\mathcal{P}_{test}$-открытый морфизм, то для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(q_n)$ существует множество $A_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\mu_1(q_n)) = \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p_n)$ такое, что $A_1 \subseteq A$. Тогда, так как для любого множества $A_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p_n)$ $A_1 \cap L \neq \emptyset$, то $A \cap L \neq \emptyset$. По определению множества q_n получаем, что $\langle s^*, \nu^* \rangle \in q_n \Leftrightarrow C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s^*, \nu^* \rangle$. Таким образом мы доказали, что для любой конфигурации $\langle s^*, \nu^* \rangle \in Conf(\mathcal{T})$ такой, что $C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s^*, \nu^* \rangle$, существуют $(a, \tau) \in L$ и $\langle \overline{s}, \overline{\nu} \rangle \in Conf(\mathcal{T})$ такие, что $\langle s^*, \nu^* \rangle \xrightarrow[\tau]{a} \langle \overline{s}, \overline{\nu} \rangle$. Тогда по определению получаем, что $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L.

- $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \notin L(\mathcal{T}_1)$. Тогда по определению получаем, что $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L' для любого множества $L' \subseteq \Sigma \times \mathbf{R}^+$.

  Предположим, что $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T})$. Это означает, в $\mathcal{T}$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$. Определим множества q_i $(i = 0..n)$ следующим образом: $q_0 = \{C_0(\mathcal{T})\}$, $q_i = \{\langle s', \nu' \rangle \mid \exists \langle s, \nu \rangle \in q_{i-1} \;\; \langle s, \nu \rangle \xrightarrow[\tau_i]{\sigma_i} \langle s', \nu' \rangle\}$. Очевидно, что для любого $i = 0..n$ $q_i \neq \emptyset$. По определению множества $RS(\mathcal{T})$ получаем, что q_i $(i = 0..n) \in RS(\mathcal{T})$ и $q_0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} q_n$. Так как μ_1 является ts-морфизмом, то $\mu_1(q_0) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \mu_1(q_n)$. Так как $\mu_1(q_i) \in RS(\mathcal{T}_1)$ $(i = 0..n)$, то $\mu_1(q_i) \neq \emptyset$, а значит в $\mathcal{T}_1$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s_1, \nu_1 \rangle$, что противоречит тому, что временное слово $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \notin L(\mathcal{T}_1)$. Таким образом получаем, что $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \notin L(\mathcal{T})$.

  По определению предиката $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L получаем, что $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L' для любого множества $L' \subseteq \Sigma \times \mathbf{R}^+$.

Пусть теперь $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L. Вновь рассмотрим два возможных случая.

- $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T})$. Это означает, в $\mathcal{T}$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$. Определим множества q_i $(i = 0..n)$ следующим образом: $q_0 = \{C_0(\mathcal{T})\}$, $q_i = \{\langle s', \nu' \rangle \mid \exists \langle s, \nu \rangle \in q_{i-1} \quad \langle s, \nu \rangle \xrightarrow[\tau_i]{\sigma_i} \langle s', \nu' \rangle\}$. Очевидно, что для любого $i = 0..n$ $q_i \neq \emptyset$. По определению множества $RS(\mathcal{T})$ получаем, что q_i $(i = 0..n) \in RS(\mathcal{T})$ и $q_0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} q_n$. Так как μ_1 является ts-морфизмом, то $\mu_1(q_0) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \mu_1(q_n)$. Так как $\mu_1(q_i) \in RS(\mathcal{T}_1)$ $(i = 0..n)$, то $\mu_1(q_i) \neq \emptyset$, а значит в $\mathcal{T}_1$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s_1, \nu_1 \rangle$. Таким образом, $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$.

Так как $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L, то это означает, что для любой конфигурации $\langle s, \nu \rangle \in Conf(\mathcal{T})$ такой, что $C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$, существуют $(a, \tau) \in L$ и $\langle s', \nu' \rangle \in Conf(\mathcal{T})$ такие, что $\langle s, \nu \rangle \xrightarrow[\tau]{a} \langle s', \nu' \rangle$. Это означает, что $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\langle s, \nu \rangle) \cap L \neq \emptyset$. По определению множества q_n получаем, что если $C_0(\mathcal{T}) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$, то $\langle s, \nu \rangle \in q_n$. Таким образом, имеем, что для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(q_n)$ $A \cap L \neq \emptyset$. Так как μ_1 — ts-морфизм, то для любого множества $A_1 \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\mu_1(q_n))$ существует множество $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(q_n)$ такое, что $A \subseteq A_1$. Тогда, так как для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(q_n)$ $A \cap L \neq \emptyset$, то $A_1 \cap L \neq \emptyset$. По определению множества $\mu(q_n)$ получаем, что $\langle s^*, \nu^* \rangle \in \mu_1(q_n)$ $\Leftrightarrow C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s^*, \nu^* \rangle$. Таким образом мы доказали, что для любой конфигурации $\langle s^*, \nu^* \rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такой, что $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s^*, \nu^* \rangle$, существуют $(a, \tau) \in L$ и $\langle \overline{s}, \overline{\nu} \rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такие, что $\langle s^*, \nu^* \rangle \xrightarrow[\tau]{a} \langle \overline{s}, \overline{\nu} \rangle$. Тогда по определению получаем, что предикат $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L истинен.

- $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \notin L(\mathcal{T})$. Тогда по определению получаем, что $\mathcal{T}$ **after** $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)$ **MUST** L' для любого множества $L' \subseteq \Sigma \times \mathbf{R}^+$.

  Предположим, что $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$. Отсюда получаем, что в $\mathcal{T}_1$ существует последовательность выполнения вида $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s, \nu \rangle$. Определим множества p_i $(i = 0..n)$ следующим образом: $p_0 = \{C_0(\mathcal{T}_1)\}$, $p_i = \{\langle s', \nu' \rangle \mid \exists \langle s, \nu \rangle \in p_{i-1}$

$\langle s,\nu\rangle \xrightarrow[\tau_i]{\sigma_i} \langle s',\nu'\rangle\}$. Очевидно, что для любого $i = 0..n$ $p_i \neq \emptyset$. По определению множества $RS(\mathcal{T}_1)$ получаем, что $p_i \in RS(\mathcal{T}_1)$ $(i = 0..n)$ и $p_0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} p_n$. Так как ts-морфизм μ_1 $\mathcal{P}_{test}$-открыт, то существуют $q_i \in RS(\mathcal{T})$ $(i = 0..n)$ такие, что $\mu_1(q_i) = p_i$ $(i = 0..n)$ и $q_0 \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} q_n$. Так как $q_i \in RS(\mathcal{T})$ $(i = 0..n)$, то для любого $i = 0..n$ $q_i \neq \emptyset$, т. е. для любого q_i существует конфигурация $\langle s_i,\nu_i\rangle \in q_i$. По определению отношения $\xrightarrow[\tau]{\sigma}$ на множестве $RS(\mathcal{T})$ получаем, что $\langle s_0,\nu_0\rangle \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s_n,\nu_n\rangle$, что противоречит тому, что $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n) \notin L(\mathcal{T})$. Таким образом, очевидно, что (σ_1,τ_1) $\ldots(\sigma_n,\tau_n) \notin L(\mathcal{T}_1)$.

Теперь по определению предиката $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1,\tau_1)\ \ldots(\sigma_n,\tau_n)$ **MUST** L получаем, что $\mathcal{T}_1$ **after** $(\sigma_1,\tau_1)\ \ldots(\sigma_n,\tau_n)$ **MUST** L' для любого множества $L' \subseteq \Sigma \times \mathbf{R}^+$.

Таким образом, мы доказали, что $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{T} \sim_t \mathcal{T}_2$. По транзитивности отношения эквивалентности получаем, что $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$. Докажем, что $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{test}} \mathcal{T}_2$.

Сначала докажем, что $L(\mathcal{T}_1) = L(\mathcal{T}_2)$. Предположим противное, т. е. пусть $L(\mathcal{T}_1) \neq L(\mathcal{T}_2)$. Без ограничения общности можно считать, что существует временное слово $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n)$ такое, что $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$ и $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n) \notin L(\mathcal{T}_2)$. По определению предиката $\mathcal{T}_2$ $after$ $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n)$ $MUST$ L получаем, что $\mathcal{T}_2$ $after$ $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n)$ $MUST$ L для любого множества $L \in 2^{\Sigma\times\mathbf{R}^+}$. Далее, так как $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_1$ $after$ $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n)$ $MUST$ L для любого множества $L \in 2^{\Sigma\times\mathbf{R}^+}$. Возьмем в качестве множества L пустое множество. Тогда имеем, что $\mathcal{T}_1$ $after$ $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n)$ $MUST$ $\emptyset$. По определению это означает, что для любого $\langle s,\nu\rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такого, что $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s,\nu\rangle$, существуют $(a,\tau) \in \emptyset$ и $\langle s',\nu'\rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такие, что $\langle s,\nu\rangle \xrightarrow[\tau]{a} \langle s',\nu'\rangle$. Далее, так как $(\sigma_1,\tau_1)\ldots(\sigma_n,\tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$, то существует конфигурация $\langle s,\nu\rangle \in Conf(\mathcal{T}_1)$ такая, что $C_0(\mathcal{T}_1) \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} \langle s,\nu\rangle$. Но для пустого множества не существует пары $(a,\tau) \in \emptyset$. Получили противоречие, доказывающее, что $L(\mathcal{T}_1) = L(\mathcal{T}_2)$.

Теперь пусть $\mathcal{T}_1 \overset{\pi_1}{\leftarrow} \mathcal{T} \overset{\pi_2}{\rightarrow} \mathcal{T}_2$ — конструкция ts-морфизмов, определенная в процессе доказательства теоремы 1. Докажем, что ts-морфизм π_1 является $\mathcal{P}_{test}$-открытым ($\mathcal{P}_{test}$-открытость ts-морфизма π_2 доказывается аналогично). По теореме 2 нам необходимо доказать выполнение двух условий.

- Пусть $\pi_1(Z) = p_n$ и пусть $p_n \xrightarrow[\tau]{\beta} p_{n+1}$. Без ограничения общности можно считать, что $p_0 = \{C_0(\mathcal{T}_1)\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} p_n$. Это означает, что $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)(\beta, \tau) \in L(\mathcal{T}_1)$. По доказанному выше имеем, что $L(\mathcal{T}_1) = L(\mathcal{T}_2)$. Отсюда получаем существование $q_i \in RS(\mathcal{T}_2)$ $(i = 0..n+1)$ таких, что $q_0 = \{C_0(\mathcal{T}_2)\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} q_n \xrightarrow[\tau]{\beta} q_{n+1}$. Пусть $Z_0 = \{\langle (p_0, q_0, \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p_0) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q_0)), \nu_0 \rangle \mid \nu_0(u) = 0\}$ и пусть, кроме того, $Z_i = \{\langle (p_i, q_i, D_i), \nu \rangle \mid D_i \in M(p_i, q_i),\ \nu(u) = \tau_i\}$ $(i = 1..n+1, \tau_{n+1} = \tau)$. По построению временной системы переходов $\mathcal{T}$ получаем, что $Z_i \in RS(\mathcal{T})$ $(i = 0..n+1)$, а также $Z_0 = \{C_0(\mathcal{T})\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} Z_n \xrightarrow[\tau]{\beta} Z_{n+1}$. По определению ts-морфизма π_1 получаем, что $\pi_1(Z_{n+1}) = p_{n+1}$. Тогда, так как ts-морфизм является взаимооднозначным отображением, получаем, что $Z = Z_n$ и $Z \xrightarrow[\tau]{\beta} Z_{n+1}$.
- Пусть $C \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}(Z)$ и $Z = \{\langle (p, q, D), \nu \rangle \mid D \in M(p, q),\ \nu(u) = \tau\}$. В доказательстве теоремы 1 было показано, что $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(Z) = \{D \mid D \in M(p, q)\}$. Отсюда получаем, что $C \in M(p, q)$. Без ограничения общности можно считать, что $C = \overline{A} \cap (\bigcup_{B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)} B)$ для некоторого $\overline{A} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p)$.

  Докажем, что для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p)$ существует множество $B_A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ такое, что $B_A \subseteq A$. Предположим обратное, т. е. пусть для любого множества $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ $B \not\subseteq A$. Это означает, что для любого $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ существует пара $(\sigma_B, \tau_B) \in B \setminus A$. Пусть $Z_0 = \{C_0(\mathcal{T})\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} Z$. Тогда по построению $\mathcal{T}$ получаем, что $p_0 = \{C_0(\mathcal{T})\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} p$ и $q_0 = \{C_0(\mathcal{T})\} \xrightarrow[\tau_1]{\sigma_1} \ldots \xrightarrow[\tau_n]{\sigma_n} q$. Теперь пусть $L^* = \{(\sigma_B, \tau_B) \mid B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)\}$. По выбору L^* очевидно, что $L^* \cap A = \emptyset$. Тогда по определению получаем, что $\mathcal{T}_2\ after\ (\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)\ MUST\ L^*$. Так как $\mathcal{T}_1 \sim_t \mathcal{T}_2$, то $\mathcal{T}_1\ after\ (\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n)\ MUST\ L^*$. Выше было показано, что $(\sigma_1, \tau_1) \ldots (\sigma_n, \tau_n) \in L(\mathcal{T}_1)$. Отсюда получаем, что для любого $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p)$ $L^* \cap A' \neq \emptyset$. Данное противоречие доказывает существование множества $B_A \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ такого, что $B_A \subseteq A$.

Аналогично доказываем, что для любого множества $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ существует множество $A_B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p)$ такое, что $A_B \subseteq B$.

Таким образом, для множества $\overline{A}$ существует множество $B_{\overline{A}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)$ такое, что $B_{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$. Далее по доказанному выше получаем существование множества $A_{B_{\overline{A}}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(p)$ такого, что $A_{B_{\overline{A}}} \subseteq B_{\overline{A}}$. Очевидно, что $A_{B_{\overline{A}}} \subseteq B_{\overline{A}} \subseteq \bigcup\limits_{B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}(q)} B$ и $A_{B_{\overline{A}}} \subseteq B_{\overline{A}} \subseteq \overline{A}$, т. е. $A_{B_{\overline{A}}} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}(\pi(Z))$ и $A_{B_{\overline{A}}} \subseteq C$, что и требовалось доказать.

По определению $\mathcal{P}_{test}$-бисимуляции получаем, что $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{test}} \mathcal{T}_2$. □.

3. СЛАБАЯ БИСИМУЛЯЦИЯ ПО МИЛНЕРУ И САНГИОРГИ

Данный раздел посвящен слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги [8]. Такая бисимуляция отличается от сильной бисимуляции по нескольким аспектам. Основное отличие заключается в том, что данная бисимуляция предполагает, что множество действий временных систем переходов содержит так называемое невидимое действие, обозначаемое τ. В виду вышесказанного в данном разделе будем иметь дело только с временными системами переходов над алфавитом Σ_τ, где $\Sigma_\tau = \Sigma \cup \{\tau\}$ для некоторого алфавита видимых действий Σ, при этом $\tau \notin \Sigma$.

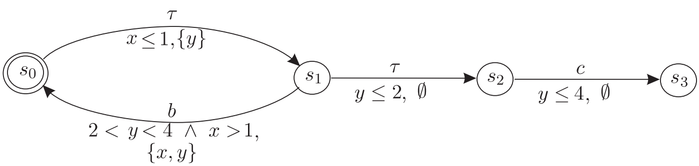


Рис. 4. Временная система переходов $\mathcal{T}$ над алфавитом Σ_τ

Пример 7. *На рис. 4 изображена временная система переходов $\mathcal{T}$, в которой множество временных переменных X_1 состоит из двух переменных x и y, а алфавит действий Σ_τ содержит три действия: невидимое действие τ и два видимых действия b и c.*

3.1. Категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{wbis}$

Перед тем как построить категорию временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{wbis}$, состоящую из временных систем переходов и wb-морфизмов между ними, приведем следующие полезные понятия.

Определение 12. *Пусть* $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$ *— временная система переходов.*

- *Конфигурацию* $\langle s, \nu \rangle$ *в* $\mathcal{T}$ *будем называть* τ*-достижимой тогда и только тогда, когда в* $\mathcal{T}$ *существует последовательность выполнения вида* $\langle s_0, \nu_0 \rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1, \nu_1 \rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n, \nu_n \rangle = \langle s, \nu \rangle$*, порождающая временное слово* $(\tau, d_1)(\tau, d_2) \ldots (\tau, d_n)$*.*
- *Через множество* $RC_\tau(\mathcal{T})$ *обозначим множество всех* τ*-достижимых конфигураций.*
- *Определим множество* τ*-достижимых состояний* $R_\tau(\mathcal{T})$ *как множество* $\{s \in S \mid s_0 \xrightarrow[\delta_1, \lambda_1]{\tau} \ \ldots \xrightarrow[\delta_n, \lambda_n]{\tau} \ s\}$*.*
- *Для любого* τ*-достижимого состояния* $r \in R_\tau(\mathcal{T})$ *будем писать* $r \downarrow$ *тогда и только тогда, когда существуют действие* $\alpha \in \Sigma$ *и состояние* $s' \in S$ *такие, что* $r \xrightarrow[\delta, \lambda]{\alpha} s'$ *для некоторых* δ, λ*.*

Пример 8. *Чтобы проиллюстрировать определенные понятия, рассмотрим временную систему переходов* $\mathcal{T}$*, изображенную на рис. 4. Для этой системы получаем, что* $R_\tau(\mathcal{T}) = \{s_0,\ s_1,\ s_2\}$*. Кроме того, имеем, что* $s_1 \downarrow$*, но* $(s_0 \not\downarrow)$*.*

Теперь приведем определение wb-морфизма.

Определение 13. *Пусть* $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$*,* $\mathcal{T}' = (S',\ \Sigma_\tau,\ s_0',\ X',\ T')$ *— две временные системы переходов. Пара* (μ, η) *называется* wb*-морфизмом между* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{T}'$*, если* $\mu : R_\tau(\mathcal{T}) \to R_\tau(\mathcal{T}')$ *— отображение между множествами* τ*-достижимых состояний, а* $\eta : X' \to X$ *— отображение между множествами временных переменных, удовлетворяющие следующим условиям:*

- $\mu(s_0) = s_0'$*;*
- *если* $r \xrightarrow[\delta,\ \lambda]{\tau} r'$ *в* $\mathcal{T}$ *для некоторых* $r, r' \in R_\tau(\mathcal{T})$*, то* $\mu(r) \xrightarrow[\delta', \lambda']{\tau} \mu(r')$ *в* $\mathcal{T}'$*, кроме того*
  - *1)* $\lambda' = \eta^{-1}(\lambda)$*, где* $\eta^{-1}(\lambda) = \{x' \in X' \mid \eta(x') \in \lambda\}$*,*
  - *2)* $\|\delta\|_X \subseteq \|\delta'[\eta(x)/x]\|_X$*;*
- *если* $r \downarrow$ *для некоторого* $r \in R_\tau(\mathcal{T})$*, то* $\mu(r) \downarrow$*.*

Пример 9. *Для временной системы переходов* $\mathcal{T}'$*, изображенной на рис. 5, выполнено следующее:* $R_\tau(\mathcal{T}) = \{t_0,\ t_1,\ t_2\}$*. Очевидно, что пара* (μ_1, η_1)*, где* μ_1 *такое, что* $\mu_1(t_i) = s_i$*,* $(i = 0..2)$*, и* η_1 *такое, что* $\eta_1(x) = u$*,* $\eta_1(y) = z$*, является* wb*-морфизмом между временными*

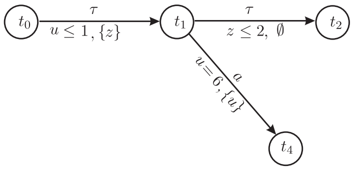


Рис. 5. Временная система переходов $\mathcal{T}'$

системами переходов $\mathcal{T}'$, изображенной на рис. 5, и $\mathcal{T}$, изображенной на рис. 4.

Приведем полезное свойство введенного wb-морфизма.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$ и $\mathcal{T}' = (S', \Sigma_\tau, s'_0, X', T')$ — две временные системы переходов и $(\mu, \eta) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — wb-морфизм между ними. Тогда верно следующее:*

(*i*) *если $\langle s_0, \nu_0\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1, \nu_1\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n, \nu_n\rangle$ — последовательность выполнения в $\mathcal{T}$, порождающая временное слово (τ, d_1) (τ, d_2) $\ldots$ (τ, d_n), то в $\mathcal{T}'$ существует порождающая тоже самое временное слово последовательность выполнения вида $\langle \mu(s_0), \eta^{-1}(\nu_0)\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle \mu(s_1), \eta^{-1}(\nu_1)\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle \mu(s_n), \eta^{-1}(\nu_n)\rangle$;*

(*ii*) *если $\langle s_0, \nu_0\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1, \nu_1\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\beta} \langle s_n, \nu_n\rangle$ — последовательность выполнения в $\mathcal{T}$, порождающая временное слово (τ, d_1) (τ, d_2) $\ldots$ (τ, d_{n-1}) (β, d_n), где $\beta \in \Sigma$, то существуют $\beta' \in \Sigma$ и конфигурация $\langle s', \nu'\rangle$ такие, что в $\mathcal{T}'$ существует порождающая временное слово (τ, d_1) (τ, d_2) $\ldots$ (τ, d_{n-1}) (β', d) последовательность выполнения вида $\langle \mu(s_0), \eta^{-1}(\nu_0)\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau}$*

$\langle \mu(s_1), \eta^{-1}(\nu_1)\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_{n-1}]{\tau} \langle \mu(s_{n-1}), \eta^{-1}(\nu_{n-1})\rangle \xrightarrow[d]{\beta'} \langle s', \nu'\rangle$.

Доказательство. Проводится индукцией по длине временного слова. $\square$.

Сформулируем определение категории временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{wbis}$.

Определение 14. *Категория $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ содержит временные системы переходов над алфавитом Σ_τ и wb-морфизмы, определенные выше. При этом композиция wb-морфизмов $(\mu, \eta) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ и $(\mu', \eta') : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}''$ определена по правилу $(\mu', \eta') \circ (\mu, \eta) = (\mu' \circ \mu, \eta \circ \eta')$, а тождественный wb-морфизм — это пара тождественных функций.*

Утверждение 3. *Категория $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ определена корректно.*

Доказательство. Следует из того факта, что тождественный wb-морфизм и композиция двух wb-морфизмов являются wb-морфизмами. $\square$.

Категория временных систем переходов $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ обладает таким полезным свойством, как коуниверсальность.

Теорема 5. *Категория $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ коуниверсальна в соответствии с определением 8.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}_0 = (S_0, \Sigma_\tau, s_0^0, X_0, T_0)$, $\mathcal{T}_1 = (S_1,\ \Sigma_\tau,\ s_0^1,\ X_1,\ T_1)$, $\mathcal{T}_2 = (S_2, \Sigma_\tau, s_0^2, X_2, T_2)$ — три временные системы переходов и пусть $\mathcal{T}_1 \overset{(\mu_1,\eta_1)}{\rightarrow} \mathcal{T}_0 \overset{(\mu_2,\eta_2)}{\leftarrow} \mathcal{T}_2$ — конструкция wb-морфизмов в категории $\mathcal{CTTS}_{wbis}$. Пусть $\alpha \in \Sigma$. Построим временную систему переходов $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$ следующим образом.

- Пусть $X_1 \biguplus X_2$ означает дизъюнктивное объединение множеств X_1 и X_2. Определим на $X_1 \biguplus X_2$ отношение эквивалентности R, порожденное отношением $R_0 = \{(x_1, x_2) \mid \exists x \in X_0 . \eta_1(x) = x_1 \wedge \eta_2(x) = x_2\}$. Теперь определим множество X как множество классов эквивалентности по отношению R на множестве $X_1 \biguplus X_2$. Вместе с этим определим два отображения $\eta_i' : X_i \rightarrow X$ $(i = 1, 2)$, которые отображают элементы множества X_i в класс эквивалентности, к которому принадлежит этот элемент.
- $s_0 = (s_0^1, s_0^2)$.
- $S = S' \cup S''$, где $S' \subseteq R_\tau(\mathcal{T}_1) \times R_\tau(\mathcal{T}_2)$, $S'' \subseteq S_1 \times S_2$ и определены следующим образом:
  - $s_0 \in S'$,
  - если $(p_1, p_2) \in S'$ и $p_1 \underset{\delta_1,\ \lambda_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} p_1'$, $p_2 \underset{\delta_2,\ \lambda_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} p_2'$ и $\mu_1(p_1') = \mu_2(p_2')$, то $(p_1', p_2') \in S'$.
  - $S'' = \{(r_1, r_2) \mid \exists (p_1, p_2) \in S' .\ p_1 \underset{\delta_1,\ \lambda_1}{\overset{\gamma}{\longrightarrow}} r_1 \wedge p_2 \underset{\delta_2,\ \lambda_2}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} r_2 \wedge \gamma \neq \tau \wedge \beta \neq \tau\}$.
- Множество T определим как объединение $T' \cup T''$, где

$$((p_1, p_2), \tau, \delta_1[\eta_1'(x)/x] \wedge \delta_2[\eta_2'(x)/x], \eta_1'(\lambda_1) \cup \eta_2'(\lambda_2), (p_1', p_2')) \in T'$$
$$\Updownarrow$$
$$(p_1, p_2), (p_1', p_2') \in S',\ p_1 \underset{\delta_1,\ \lambda_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} p_1' \text{ и } p_2 \underset{\delta_2,\ \lambda_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} p_2'$$

и

$$((r_1, r_2), \alpha, x \geq 0, \emptyset, (r_1', r_2')) \in T''$$
$$\Updownarrow$$
$$(r_1, r_2) \in S',\ (r_1', r_2') \in S'' \text{ и } \exists \beta, \gamma \in \Sigma.\ r_1 \underset{\delta_1,\ \lambda_1}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} r_1' \text{ и } r_2 \underset{\delta_2,\ \lambda_2}{\overset{\gamma}{\longrightarrow}} r_2'.$$

По построению очевидно, что $\mathcal{T}$ является временной системой переходов.

В дополнении к определенным выше двум отображениям η'_1 и η'_2 определим отображения $\mu'_i : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_i$ $(i = 1, 2)$ по следующему правилу $\mu'_i((p_1, p_2)) = p_i$. Из построения следует, что пары (μ'_1, η'_1) и (μ'_2, η'_2) являются wb-морфизмами.

Кроме того, нетрудно проверить, что $(\mu_1, \eta_1) \circ (\mu'_1, \eta'_1) = (\mu_2, \eta_2) \circ (\mu'_1, \eta'_2)$.

Теперь пусть $\mathcal{T}_1 \overset{(\phi_1,\xi_1)}{\longleftarrow} \mathcal{T}' \overset{(\phi_2,\xi_2)}{\longrightarrow} \mathcal{T}_2$ — конструкция wb-морфизмов, удовлетворяющая условию: $(\mu_1, \eta_1) \circ (\phi_1, \xi_1) = (\mu_2, \eta_2) \circ (\phi_2, \xi_2)$. Определим отображение $\mu : R_\tau(\mathcal{T}') \to R_\tau(\mathcal{T})$ по правилу $\mu(s') = (\phi_1(s'), \phi_2(s'))$. Кроме того, определим отображение $\eta : X \to X'$ по следующему правилу: $\eta(x) = \xi_1(x) \cup \xi_2(x)$, где $\xi_i(x) = \{\xi(x') \mid x' \in x \wedge x' \in X_i\}$ $(i = 1, 2)$. По построению множества X с учетом того, что $(\mu_1, \eta_1) \circ (\phi_1, \xi_1) = (\mu_2, \eta_2) \circ (\phi_2, \xi_2)$, легко показать, что $\xi_1(x) \cup \xi_2(x) = \{z\}$ для некоторого $z \in X'$. Отсюда следует, что определенная пара отображений является wb-морфизмом.

Равенства $(\phi_1, \xi_1) = (\mu'_1, \eta'_1) \circ (\mu, \eta)$ и $(\phi_2, \xi_2) = (\mu'_2, \eta'_2) \circ (\mu, \eta)$ следуют из определения wb-морфизмов (μ, η), (μ'_1, η'_1) и (μ'_2, η'_2). $\square$.

3.2. $\mathcal{P}_{wbis}$-открытые морфизмы

Для начала выделим подкатегорию $\mathcal{P}_{wbis}$ в категории $\mathcal{CTTS}_{wbis}$, содержащую в качестве объектов временные системы переходов специального вида, называемые τ-ветвями. Приведем формальное определение τ-ветви.

Определение 15. *Для временного слова $(\tau, d_0)(\tau, d_1) \ldots (\beta, d_n)$, где $\beta \in \Sigma_\tau$, определим τ-ветвь $\mathcal{O}$ как временную систему переходов вида*

$$s_0^* \xrightarrow[\delta_1^*,\, \lambda_1^*]{\tau} s_1^* \xrightarrow[\delta_2^*,\, \lambda_2^*]{\tau} \quad \cdots \quad \xrightarrow[\delta_{n-1}^*,\, \lambda_{n-1}^*]{\tau} s_{n-1}^* \xrightarrow[\delta_n^*,\, \lambda_n^*]{\beta} s_n^*$$

Таким образом, τ-ветвь содержит $(n+1)$ состояние ($S = \{s_0^*,\ s_1^*,\ \ldots,\ s_n^*\}$), а множество временных переменных этой системы состоит из всех подмножеств множества S. Множество $\lambda_i^* = \{x_j \mid s_i^* \in x_j\}$, а конструкция $\delta_i^* = \bigwedge_{x_j \in X^*} (x_j = d_i - d_{I(s_i, x_j)})$, где $I(s_i, x_j) = max(k : k <$

$i \wedge s_k \in x_j$), если же такого k не существует, то $I(s_i, x_j) = 0$. Кроме того, $d_0 = 0$.

Теперь приведем формальное определение подкатегории $\mathcal{P}_{wbis}$.

Определение 16. *Подкатегория $\mathcal{P}_{wbis}$ в категории $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ содержит τ-ветви и wb-морфизмы между ними.*

В дальнейшем нам для доказательств понадобится следующая техническая теорема.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$ — временная система переходов и $\alpha = (\tau, d_1)\ (\tau, d_2) \ldots (\tau, d_{n-1})(\beta, d_n)$ — временное слово, для которого $\beta \in \Sigma_\tau$. Тогда для любой последовательности выполнения, порождающей временное слово α, вида*

$\langle s_0, \nu_0 \rangle \ \underset{d_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \ \langle s_1, \nu_1 \rangle \ \underset{d_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \ \cdots \ \underset{d_n}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} \ \langle s_n, \nu_n \rangle$

мы можем сопоставить wb-морфизм $(\mu, \eta) : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$ такой, что

- *$\mathcal{O}$ — τ-ветвь, порождающая временное слово α;*
- *$\mu(s_i^*) = s_i$;*
- *$\eta(x) = \{s_i^* \mid 1 \leq i \leq n \wedge \nu_i(x) = 0\}$.*

Более того, данное сопоставление биективно.

Доказательство. Нетрудно убедится, что определенная пара отображений (μ, η) действительно является wb-морфизмом в соответствии с определением 13.

Теперь проверим, что сопоставление биективно. Пусть $\mathcal{O}$ — τ-ветвь, порождающая временное слово $(\tau, d_1)(\tau, d_2) \ldots (\tau, d_{n-1})(\beta, d_n)$, и $(\mu', \eta') : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$ — wb-морфизм. Тогда по построению очевидно, что $s_0^* \underset{\delta_1^*, \lambda_1^*}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} s_1^* \underset{\delta_2^*, \lambda_2^*}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \cdots \underset{\delta_{n-1}^*, \lambda_{n-1}^*}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} s_{n-1}^* \underset{\delta_n^*, \lambda_n^*}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} s_n^*$ — последовательность выполнения в $\mathcal{O}$. Рассмотрим два возможных случая.

$\beta = \tau$ В этом случае по определению 13, так как (μ', η') — wb-морфизм, получаем, что $\mu'(s_0^*) \underset{\delta_1, \lambda_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \mu'(s_1^*) \underset{\delta_2, \lambda_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \cdots \underset{\delta_n, \lambda_n}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \mu'(s_n^*)$. При этом $\lambda_i = (\eta')^{-1}(\lambda_i^*) = \{x \in X \mid \eta'(x) \in \lambda_i^*\} = \{x \in X \mid s_i^* \in \eta'(x)\}$ и $\|\delta_i^*\|_{X_\mathcal{O}} \subseteq \|\delta_i[\eta'(x)/x]\|_{X_\mathcal{O}}$. По определению последовательности выполнения получаем, что $\langle \mu'(s_i^*), \nu_i \rangle \underset{d_{i+1}}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \langle \mu'(s_{i+1}^*), \nu_{i+1} \rangle$ для любого $i = 0..(n-1)$, и при этом $\nu_{i+1} = (\nu_i(x) + (d_{i+1} - d_i))[\{x \mid s_{i+1}^* \in \eta'(x)\} \to 0]$.

$\beta \neq \tau$ В этом случае по определению 13 так как (μ', η') — wb-морфизм, получаем, что $\mu'(s_0^*) \underset{\delta_1, \lambda_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \mu'(s_1^*) \underset{\delta_2, \lambda_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \cdots \underset{\delta_{n-1}, \lambda_{n-1}}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \mu'(s_{n-1}^*) \underset{\delta, \lambda}{\overset{\beta}{\longrightarrow}} s_n$ для некоторого состояния s_n. При этом $\lambda_i = (\eta')^{-1}(\lambda_i^*) = \{x \in X \mid \eta'(x) \in \lambda_i^*\} = \{x \in X \mid s_i^* \in \eta'(x)\}$ и $\|\delta_i^*\|_{X_\mathcal{O}} \subseteq \|\delta_i[\eta'(x)/x]\|_{X_\mathcal{O}}$. По определению последовательности выполнения получаем, что $\langle \mu'(s_i^*), \nu_i\rangle \underset{d_{i+1}}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu'(s_{i+1}^*), \nu_{i+1}\rangle$ для любого $i = 0..(n-2)$, и при этом $\nu_{i+1} = (\nu_i(x) + (d_{i+1} - d_i))[\{x \mid s_{i+1}^* \in \eta'(x)\} \to 0]$.

В любом из этих случаев получаем, что $(\mu, \eta) \circ (\mu', \eta') = (\mu', \eta') \circ (\mu, \eta) = (\mu_{id}, \eta_{id})$, что доказывает требуемую биективность. $\square$.

В соответствии с теоретико-категорным понятием открытого морфизма определим $\mathcal{P}_{wbis}$-открытые морфизмы. Наша дальнейшая цель — дать характеризацию $\mathcal{P}_{wbis}$-открытости для wb-морфизмов.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$, $\mathcal{T}' = (S', \Sigma_\tau, s_0', X', T')$ — две временные системы переходов, а $(\mu, \eta) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — wb-морфизм между ними. Тогда wb-морфизм (μ, η) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым морфизмом тогда и только тогда, когда для любой τ-достижимой конфигурации $\langle s, \nu\rangle$ и любой функции временного прогресса $\nu' = \nu + t$ выполнены следующие условия:*

- *если $\mu(s) \underset{\delta', \lambda'}{\xrightarrow{\tau}} r'$ и $\|\eta^{-1}(\nu')\|_{X'} \in \|\delta'\|_{X'}$, то существует переход $s \underset{\delta, \lambda}{\xrightarrow{\tau}} s'$ такой, что $\mu(s') = r'$, $\|\nu'\|_X \in \|\delta\|_X$ и $\lambda' = \eta^{-1}(\lambda)$;*
- *если $\mu(s) \downarrow$, то $s \downarrow$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mu : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ $\mathcal{P}_{wbis}$-открытый морфизм. Выберем произвольную τ-достижимую конфигурацию $\langle s, \nu\rangle$ в $\mathcal{T}$. Из τ-достижимости данной конфигурации следует существование временного слова $\alpha = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)$ и последовательности выполнения $\langle s_0, \nu_0\rangle \underset{d_1}{\xrightarrow{\tau}} \langle s_1, \nu_1\rangle \underset{d_2}{\xrightarrow{\tau}} \ldots \underset{d_n}{\xrightarrow{\tau}} \langle s_n, \nu_n\rangle = \langle s, \nu\rangle$, порождающей это временное слово. Отсюда по теореме 4 пункту (i) получаем существование последовательности выполнения $\langle \mu(s_0), \eta^{-1}(\nu_0)\rangle \underset{d_1}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu(s_1), \eta^{-1}(\nu_1)\rangle \underset{d_2}{\xrightarrow{\tau}} \ldots \underset{d_n}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu(s_n), \eta^{-1}(\nu_n)\rangle$ в $\mathcal{T}'$.

Проверим выполнение первого условия теоремы.

Пусть для некоторой функции временного прогресса $\nu' = \nu + d$ верно, что $\mu(s) \underset{\delta', \lambda'}{\xrightarrow{\tau}} r'$ и $\|\eta^{-1}(\nu')\|_{X'} \in \|\delta'\|_{X'}$. Это означает существование в $\mathcal{T}'$ последовательности выполнения $\langle \mu(s_0), \eta^{-1}(\nu_0)\rangle \underset{d_1}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu(s_1), \eta^{-1}(\nu_1)\rangle \underset{d_2}{\xrightarrow{\tau}} \ldots \underset{d_n}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu(s_n), \eta^{-1}(\nu_n)\rangle \underset{d'}{\xrightarrow{\tau}} \langle r', (\nu^{-1}(\nu'))[\lambda' \to 0]\rangle$, порождающей временное слово $\alpha' = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)(\tau, d')$.

Пусть $\mathcal{O}$ — τ-ветвь, построенная по временному слову α, а $\mathcal{O}'$ — τ-ветвь, построенная по временному слову α'. Определим wb-морфизм $(\mu_0, \eta_0) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ по правилу $\mu_0(s_i^*) = {s'}_i^*$ для любого $i \in \{0..n\}$ и $\eta_0(x) = \{s_i^* \mid {s'}_i^* \in x\}$. Нетрудно доказать, что (μ_0, η_0) является wb-морфизмом.

Далее по теореме 6 первой последовательности выполнения мы можем сопоставить wb-морфизм $(\mu_1, \eta_1) : \mathcal{O} \to \mathcal{T}$, а второй — wb-морфизм $(\mu_2, \eta_2) : \mathcal{O}' \to \mathcal{T}'$. Кроме того, по построению этих морфизмов очевидно, что $(\mu, \eta) \circ (\mu_1, \eta_1) = (\mu_2, \eta_2) \circ (\mu_0, \eta_0)$. Теперь так как wb-мофризм (μ, η) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым, то существует wb-морфизм $(\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta}) : \mathcal{O}' \to \mathcal{T}$ такой, что $(\mu, \eta) \circ (\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta}) = (\mu_2, \eta_2)$ и $(\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta}) \circ (\mu_0, \eta_0) = (\mu_1, \eta_1)$.

Теперь имеем $\widetilde{\mu}({s'}_n^*) = \widetilde{\mu}(\mu_0(s_n^*)) = \mu_1(s_n^*) = s_n = s$. Далее так как ${s'}_n^* \xrightarrow[{\delta'}_{n+1}^*, {\lambda'}_{n+1}^*]{\tau} {s'}_{n+1}^*$ и $(\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta})$ — wb-морфизм, то $\widetilde{\mu}({s'}_{n+1}^*) \in R_\tau(\mathcal{T}')$ и $\widetilde{\mu}({s'}_n^*) \xrightarrow[\delta, \lambda]{\tau} \widetilde{\mu}({s'}_{n+1}^*)$, где $\lambda = (\widetilde{\eta})^{-1}({\lambda'}_{n+1}^*) = \{x \in X \mid \widetilde{\eta}(x) \in {\lambda'}_{n+1}^*\}$ и $\|{\delta'}_{n+1}^*\|_{X'} \subseteq \|\delta[\widetilde{\eta}(x)/x]\|_{X'}$. Так как $(\mu_1, \eta_1) = (\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta}) \circ (\mu_0, \eta_0)$ и $(\mu_2, \eta_2) = (\mu, \eta) \circ (\widetilde{\mu}, \widetilde{\eta})$, то $\eta_2 = \widetilde{\eta} \circ \eta$ и $\eta_1 = \eta_0 \circ \widetilde{\eta}$. Отсюда получаем, что $\eta^{-1}(\lambda) = \{x \in X' \mid \eta(x) \in \lambda\} = \{x \in X' \mid \eta(x) \in \{x \in X \mid \widetilde{\eta}(x) \in {\lambda'}_{n+1}^*\}\} = \{x \in X' \mid \widetilde{\eta}(\eta(x)) \in {\lambda'}_{n+1}^*\} = \{x \in X' \mid \eta_2(x) \in {\lambda'}_{n+1}^*\} = \eta_2^{-1}({\lambda'}_{n+1}^*) = \lambda'$. Кроме того, по доказанному выше получаем, что $\|{\delta'}_{n+1}^*[\eta(x)/x]\|_X \subseteq \|(\delta[\widetilde{\eta}(x)/x])[\eta(x)/x]\|_X = \|\delta[\eta \circ \widetilde{\eta}(x)/x]\|_X = \|\delta\|_X$.

Кроме того, очевидно, что $\mu(\widetilde{\mu}({s'}_{n+1}^*)) = \mu_3({s'}_{n+1}^*) = r'$. Пусть $s' = \widetilde{\mu}({s'}_{n+1}^*)$. Тогда ясно, что $s \xrightarrow[\delta, \lambda]{\tau} s'$ и $\mu(s') = r'$, что и требовалось показать.

Осталось проверить выполнение второго условия теоремы.

Пусть $\mu(s){\downarrow}$. По определению это означает, что $\mu(s) \xrightarrow[\delta', \lambda']{\beta} r'$ для некоторого видимого действия $\beta \in \Sigma$. Это в свою очередь означает существование в $\mathcal{T}'$ последовательности выполнения $\langle \mu(s_0), \eta^{-1}(\nu_0) \rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle \mu(s_1), \eta^{-1}(\nu_1) \rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle \mu(s_n), \eta^{-1}(\nu_n) \rangle \xrightarrow[d']{\beta} \langle r', \nu' \rangle$, порождающей временное слово $\alpha'' = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)(\beta, d')$. Пусть $\mathcal{O}''$ — τ-ветвь, построенная по временному слову α''.

Определим wb-морфизм $(\mu_0', \eta_0') : \mathcal{O} \to \mathcal{O}''$ аналогично wb-морфизму (μ_0, η_0). Проверка того, что (μ_0', η_0') является wb-морфизмом, аналогична проверке того факта, что пара (μ_0, η_0) действительно является wb-морфизмом.

Далее по теореме 6 мы можем сопоставить этой последовательности wb-морфизм $(\mu_1', \eta_1') : \mathcal{O}'' \to \mathcal{T}'$.

Кроме того, по определению wb-морфизмов очевидно, что $\mu \circ \mu_1' = \mu_2 \circ \mu_0'$ и $\eta_1' \circ \eta = \eta_0' \circ \eta_2$.

Далее, так как (μ, η) — $\mathcal{P}_{wbis}$-открытый морфизм, то существует wb-морфизм $(\overline{\mu}, \overline{\eta}) : \mathcal{O}'' \to \mathcal{T}$ такой, что $(\mu_1', \eta_1') = (\overline{\mu}, \overline{\eta}) \circ (\mu_0', \eta_0')$ и $(\mu_2, \eta_2) = (\mu, \eta) \circ (\overline{\mu}, \overline{\eta})$.

Тогда получаем, что $\overline{\mu}({s''}^*_n) = \overline{\mu}(\mu_1'(s^*_n)) = \mu_1(s^*_n) = s_n = s$. По построению τ-ветви $\mathcal{O}''$ очевидно, что ${s''}^*_n \downarrow$. Тогда так как $(\overline{\mu}, \overline{\eta})$ является wb-морфизмом, то $\overline{\mu}({s''}^*_n) \downarrow$.

($\Leftarrow$) Пусть выполнены оба условия теоремы, докажем, что (μ, η) — $\mathcal{P}_{wbis}$-открытый морфизм. Пусть следующие wb-морфизмы — $(\mu_1, \eta_1) : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ в подкатегории $\mathcal{P}_{wbis}$ и $(\mu_2, \eta_2) : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{T}$, $(\mu_3, \eta_3) : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{T}'$ и $(\mu, \eta) : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ в категории $\mathcal{CTTS}_{wbis}$ — образуют коммутативную диаграмму, т. е. $(\mu, \eta) \circ (\mu_2, \eta_2) = (\mu_3, \eta_3) \circ (\mu_1, \eta_1)$.

Учитывая строение подкатегории $\mathcal{P}_{wbis}$, рассмотрим все возможные варианты для τ-ветвей $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$.

- Пусть τ-ветвь $\mathcal{O}_1$ построена по временному слову $\alpha_1 = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)$, а τ-ветвь $\mathcal{O}_2$ — по временному слову $\alpha_2 = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n) (\tau, d_{n+1}) \ldots (\tau, d_{n+k})$. Докажем утверждение теоремы для $k = 1$, доказательство всех остальных случаев получается k-кратным повторением доказательства этого случая.
  По теореме 6 для wb-морфизма (μ_2, η_2) имеем последовательность выполнения $\langle \mu_2(s_0^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_0) \rangle \underset{d_1}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_2(s_1^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_1) \rangle \underset{d_2}{\xrightarrow{\tau}} \ldots \underset{d_n}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_2(s_n^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_n) \rangle$ в $\mathcal{T}$, порождающую временное слово α_1. Далее, вновь по теореме 6, но на этот раз примененной к wb-морфизму (μ_3, η_3), получаем существование последовательности выполнения $\langle \mu_3(s_0^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_0') \rangle \underset{d_1}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_3(s_1^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_1') \rangle \underset{d_2}{\xrightarrow{\tau}} \ldots \underset{d_n}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_3(s_n^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_n') \rangle \underset{d_{n+1}}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_3(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_{n+1}') \rangle$ в $\mathcal{T}'$, порождающей временное слово α_2. По коммутативности диаграммы получаем, что $\mu(\mu_2(s_i^{\mathcal{O}_1})) = \mu_3(s_i^{\mathcal{O}_2})$ и $\eta^{-1}(\eta_2^{-1}\nu_i) = \eta_3^{-1}(\nu_i')$ для любого $i = 1..n$.
  Далее так как $\langle \mu_3(s_n^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_n') \rangle \underset{d_{n+1}}{\xrightarrow{\tau}} \langle \mu_3(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2}), \eta_3^{-1}(\nu_{n+1}') \rangle$ в $\mathcal{T}'$, то существует переход $\mu_3(s_n^{\mathcal{O}_2}) \underset{\delta_{n+1}', \lambda_{n+1}'}{\xrightarrow{\tau}} \mu_3(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2})$ в $\mathcal{T}'$ такой, что

$\|\eta_3^{-1}(\nu'_n) + (d_{n+1} - d_n)\|_{X'} \in \|\delta'_{n+1}\|_{X'}$ и $\eta_3^{-1}(\nu'_{n+1}) = (\eta_3^{-1}(\nu'_n) + (d_{n+1} - d_n))[\lambda'_{n+1} \to 0]$.

Пусть $\nu' = \eta_3^{-1}(\nu'_n) + (d_{n+1} - d_n)$, тогда для конфигурации $\langle \mu_2(s_n^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_n)\rangle$ и временной функции прогресса ν' существует переход $\mu(\mu_2(s_n^{\mathcal{O}_1})) = \mu_3(s_n^{\mathcal{O}_2}) \underset{\delta'_{n+1}, \lambda'_{n+1}}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \mu_3(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2})$ такой, что $\|\eta^{-1}(\nu')\|_{X'} = \|\eta^{-1}(\eta^{-3}(\nu'_n) + (d_{n+1} - d_n))\|_{X'} = \|\eta_3^{-1}(\nu'_n) + (d_{n+1} - d_n)\|_{X'} \in \|\delta'_{n+1}\|_{X'}$. Тогда по условию теоремы существует переход $\mu_2(s_n^{\mathcal{O}_1}) \underset{\delta_{n+1}, \lambda_{n+1}}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} s'$ в $\mathcal{T}$ такой, что $\mu(s') = \mu_3(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2})$, $\|\nu'\|_X \in \|\delta_{n+1}\|_X$ и $\lambda'_{n+1} = \eta^{-1}(\lambda_{n+1})$. Отсюда получаем, что $\langle \mu_2(s_0^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_0)\rangle \underset{d_1}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \langle \mu_2(s_1^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_1)\rangle \underset{d_2}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \ldots \underset{d_n}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \langle \mu_2(s_n^{\mathcal{O}_1}), \eta_2^{-1}(\nu_n)\rangle \underset{d_{n+1}}{\overset{\tau}{\longrightarrow}} \langle s', \nu'[\lambda_{n+1} \to 0]\rangle$ — последовательность выполнения в $\mathcal{T}$, порождающая временное слово α_2.

Определим отображение $\mu' : \mathcal{R}_\tau(\mathcal{O}_2) \to \mathcal{R}_\tau(\mathcal{T})$ по правилу $\mu'(s_i^{\mathcal{O}_2}) = \mu_2(s_i^{\mathcal{O}_1})$ для всех $i = 0..n$ и $\mu'(s_{n+1}^{\mathcal{O}_2}) = s'$, а отображение $\eta' : X \to X_{\mathcal{O}_2}$ по правилу $\eta' = \eta_3 \circ \eta^{-1}$. Легко проверить, что пара (μ', η') является wb-морфизмом.

Кроме того, по построению последовательности выполнения верно, что $(\mu', \eta') \circ (\mu_1, \eta_1) = (\mu_2, \eta_2)$ и $(\mu, \eta) \circ (\mu', \eta') = (\mu_3, \eta_3)$.

- Пусть τ-ветвь $\mathcal{O}_1$ построена по временному слову $\alpha_1 = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)\ (\beta, d)$, а τ-ветвь $\mathcal{O}_2$ — по временному слову $\alpha_2 = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_m)(\gamma, d')$. Так как (μ_1, η_1) — wb-морфизм и $s_n^{\mathcal{O}_1} \downarrow$, то $s_n^{\mathcal{O}_2} \downarrow$, следовательно, $n = m$. В этом случае определим отображение $\mu' : \mathcal{R}_\tau(\mathcal{O}_2) \to \mathcal{R}_\tau(\mathcal{T})$ по правилу $\mu'(s_i^{\mathcal{O}_2}) = \mu_2(s_i^{\mathcal{O}_1})$ для всех $i = 0..n$, а отображение $\eta' : X \to X_{\mathcal{O}_2}$ по правилу $\eta'(x) = \{s_i^{\mathcal{O}_2} \mid s_i^{\mathcal{O}_1} \in \eta_2(x)\}$. Пара (μ', η') является wb-морфизмом, так как (μ_2, η_2) — wb-морфизм. Кроме того, по построению очевидно, что $(\mu', \eta') \circ (\mu_1, \eta_1) = (\mu_2, \eta_2)$ и $(\mu, \eta) \circ (\mu', \eta') = (\mu_3, \eta_3)$.
- Пусть τ-ветвь $\mathcal{O}_1$ построена по временному слову $\alpha_1 = (\tau, d_1)\ \ldots\ (\tau, d_n)$, а τ-ветвь $\mathcal{O}_2$ — по временному слову $\alpha_2 = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)(\tau, d_{n+1}) \ldots (\tau, d_{n+k})(\beta, d)$. Доказательство этого случая аналогично доказательству первого случая, единственным исключением является доказательство третьего условия при проверке того факта, что определенная пара отображений (μ', η') является wb-морфизмом. В данном случае имеем, что $s_{n+k}^{\mathcal{O}_2} \downarrow$. По определению wb-морфизма получаем, что $\mu_3(s_{n+k}^{\mathcal{O}_2}) \downarrow$. Тогда так

как для найденного состояния s' верно, что $\mu(s') = \mu_3(s^{\mathcal{O}_2}_{n+k})$, то по второму условию теоремы заключаем, что $s' \downarrow$, что и требовалось.

$\square$.

Пример 10. *Согласно только что доказанной теореме получаем, что wb-морфизм μ_1, определенный в примере 9, не является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым морфизмом, так как для состояния $s_2 = \mu_1(t_2)$ верно, что $s_2 \downarrow$, но $t_2 \not\downarrow$.*

3.3. Теоретико-категорная характеризация

Для начала определим временной вариант слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги для временных систем переходов.

Определение 17. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ_τ. Будем говорить, что $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$* слабо бисимуляционны по Милнеру и Сангиорги *(и обозначать $\mathcal{T}_1 \sim_{wb} \mathcal{T}_2$) тогда и только тогда, когда существует отношение $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{RC}_\tau(\mathcal{T}_1) \times \mathcal{RC}_\tau(\mathcal{T}_2)$ такое, что*

- $(\langle s_0^1, \nu_0^1\rangle, \langle s_0^2, \nu_0^2\rangle) \in \mathcal{B}$;
- $((\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B} \ \wedge \ \langle s^1, \nu^1\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle s'^1, \nu'^1\rangle) \Rightarrow$ *(для некоторого* $\langle s'^2, \nu'^2\rangle$ *верно* $(\langle s^2, \nu^2\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle s'^2, \nu'^2\rangle) \wedge \ (\langle s'^1, \nu'^1\rangle, \langle s'^2, \nu'^2\rangle) \in \mathcal{B})$;
- $((\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B} \ \wedge \ \langle s^2, \nu^2\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle s'^2, \nu'^2\rangle) \Rightarrow$ *(для некоторого* $\langle s'^1, \nu'^1\rangle$ *верно* $(\langle s^1, \nu^1\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle s'^1, \nu'^1\rangle) \wedge \ (\langle s'^1, \nu'^1\rangle, \langle s'^2, \nu'^2\rangle) \in \mathcal{B})$;
- $((\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B}) \Rightarrow (s^1 \downarrow \Leftrightarrow s^2 \downarrow)$.

Пример 11. *Для временных систем переходов $\mathcal{T}$, изображенной на рис. 4 и $\mathcal{T}''$, изображенной на рис. 6, имеем, что они являются слабо бисимуляционными по Милнеру и Сангиорги, но в тоже время вышеупомянутая временная система переходов $\mathcal{T}''$ и временная*

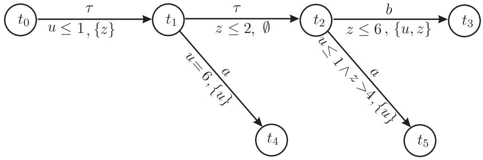


Рис. 6. Временная система переходов $\mathcal{T}''$

систем переходов $\mathcal{T}'$, изображенная на рис. 5, не являются таковыми.

Основной результат данного раздела заключается в том, что определенная выше слабая бисимуляция по Милнеру и Сангиорги совпадает с $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляцией, определяемой по подкатегории $\mathcal{P}_{wbis}$ стандартным способом.

Приведем определение $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляции.

Определение 18. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ_τ. Будем говорить, что $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$* $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляционны *(и обозначать $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{wbis}} \mathcal{T}_2$) тогда и только тогда, когда существует конструкция $\mathcal{P}_{wbis}$-открытых морфизмов $\mathcal{T}_1 \stackrel{(\mu_1,\eta_1)}{\longleftarrow} \mathcal{T} \stackrel{(\mu_2,\eta_2)}{\longrightarrow} \mathcal{T}_2$.*

Утверждение 4. *Определенная выше $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляция действительно является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Следует из коуниверсальности категории $\mathcal{CTTS}_{wbis}$. $\square$.

Докажем основную теорему этого раздела.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — временные системы переходов над множеством действий Σ_τ. Тогда $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{wbis}} \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \sim_{wb} \mathcal{T}_2$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{wbis}} \mathcal{T}_2$. Тогда по определению $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляции существует конструкция $\mathcal{P}_{wbis}$-открытых морфизмов $\mathcal{T}_1 \stackrel{(\mu_1,\eta_1)}{\longleftarrow} \mathcal{T} \stackrel{(\mu_2,\eta_2)}{\longrightarrow} \mathcal{T}_2$.

Определим отношение $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{RC}_\tau(\mathcal{T}_1) \times \mathcal{RC}_\tau(\mathcal{T}_2)$ следующим образом: $(\langle s_1, \nu_1\rangle, \langle s_2, \nu_2\rangle) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \langle s, \nu\rangle \in \mathcal{RC}_\tau(\mathcal{T})\ \mu_i(s) = s_i$ и $\nu_i = \eta_i^{-1}(\nu)$ $(i = 1, 2)$.

Проверим, что это отношение действительно является слабой бисимуляцией по Милнеру и Сангиорги.

- Так как по определению wb-морфизма имеем, что $\mu_i(s_0) = s_0^i$ и $\eta_i^{-1}(\nu_0) = \nu_0^i$ является нулевой постоянной функцией, то $(\langle s_0^1, \nu_0^1\rangle, \langle s_0^2, \nu_0^2\rangle) \in \mathcal{B}$.
- Пусть $(\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B}$ и $\langle s^1, \nu^1\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle s'^1, \nu'^1\rangle$. Отсюда следует, что $s^1 \xrightarrow[\delta_1,\lambda_1]{\tau} s'^1$, $\nu'^1 = (\nu^1 + d')[\lambda_1 \to 0]$ и $\|\nu^1 + d'\|_{X_1} \in \|\delta_1\|_{X_1}$. Так как $(\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B}$, то существует τ-достижимая конфигурация $\langle s, \nu\rangle$ такая, что $\mu_i(s) = s^i$ и $\nu^i = \eta_i^{-1}(\nu)$ $(i = 1, 2)$. Тогда получаем, что $\mu_i(s) \xrightarrow[\delta_1,\lambda_1]{\tau} s'^1$, $\nu'^1 = (\eta_i^{-1}(\nu) + d')[\lambda_1 \to 0]$ и $\|\eta_i^{-1}(\nu) + d'\|_{X_1} \in \|\delta_1\|_{X_1}$. Тогда так как wb-морфизм (μ_1, η_1) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым, то по теореме 7 получаем

существование перехода $s \xrightarrow[\delta,\lambda]{\tau} s'$ такого, что $\mu_1({s'}^1) = s'$, $\|\nu + d'\|_X \in \|\delta\|_X$ и $\lambda_1 = \eta_1^{-1}(\lambda)$. Далее так как (μ_2, η_2) — wb-морфизм, то $\mu_2(s) = s^2 \xrightarrow[\delta_2,\lambda_2]{\tau} \mu_2(s') = {s'}^2$, $\lambda_2 = \eta_2^{-1}(\lambda)$ и $\|\delta\|_X \subseteq \|\delta_2[\eta_2(x)/x]\|_X$. Это означает, что $\langle s^2, \nu^2\rangle \xrightarrow[d]{\tau} \langle {s'}^2, {\nu'}^2\rangle$, где ${\nu'}^2 = (\nu^2 + d')[\lambda_2 \to 0] = (\eta_2^{-1}(\nu) + d')[\eta_2^{-1}(\lambda) \to 0] = \eta_2^{-1}((\nu + d')[\lambda \to 0])$. Таким образом, получаем, что $(\langle {s'}^1, {\nu'}^1\rangle, \langle {s'}^2, {\nu'}^2\rangle) \in \mathcal{B}$.

- Аналогично предыдущему условию.
- Пусть $(\langle s^1, \nu^1\rangle, \langle s^2, \nu^2\rangle) \in \mathcal{B}$. Тогда по определению данного отношения получаем существование τ-достижимой конфигурации $\langle s, \nu\rangle$ такой, что $\mu_i(s) = s^i$ и $\nu^i = \eta_i^{-1}(\nu)$ $(i = 1, 2)$. Докажем, что $s^1 \downarrow \Leftrightarrow s^2 \downarrow$. Пусть $s^1 \downarrow$, т. е. $\mu_1(s) \downarrow$. Так как wb-морфизм (μ_1, η_1) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым, то по теореме 7 получаем, что $s \downarrow$. Далее так как (μ_2, η_2) wb-морфизм, то $\mu_2(s) \downarrow$, что означает, что $s^2 \downarrow$. Теперь пусть $s^2 \downarrow$, т. е. $\mu_2(s) \downarrow$. Так как wb-морфизм (μ_2, η_2) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым, то по теореме 7 получаем, что $s \downarrow$. Далее так как (μ_1, η_1) wb-морфизм, то $\mu_1(s) \downarrow$, что означает, что $s^1 \downarrow$.

$(\Rightarrow)$ Пусть $\mathcal{T}_1 \sim_{wb} \mathcal{T}_2$. Докажем, что $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{wbis}} \mathcal{T}_2$. По определению слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги получаем существование бисимуляционного отношения $\mathcal{B}$. Построим временную систему переходов $\mathcal{T} = (S, \Sigma_\tau, s_0, X, T)$ следующим образом.

- Пусть $X = X_1 \biguplus X_2$, где $X_1 \biguplus X_2$ означает дизъюнктивное объединение множеств X_1 и X_2. Вместе с этим определим два отображения $\eta'_i : X_i \to X$ $(i = 1, 2)$, которые являются функциями вложения.
- Начальное состояние $s_0 = (\langle s_0^1, \nu_0^1\rangle, \langle s_0^2, \nu_0^2\rangle)$.
- Множество состояний S этой системы определим как объединение двух множеств $S' \cup S''$. Множество S' содержит все пары последовательностей выполнения, связанных отношением $\mathcal{B}$, т. е. $S' = \{(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \mid (\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \in \mathcal{B}\}$. Здесь две последовательности выполнения $\rho_i^\alpha : \langle s_0^i, \nu_0^i\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1^i, \nu_1^i\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n^i, \nu_n^i\rangle$ $(i = 1, 2)$ в $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ соответственно, порождающие одно и тоже временное слово $\alpha = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)$, называются связанными отношением $\mathcal{B}$ (обозначается $(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \in \mathcal{B}$) тогда и только тогда, когда $(\langle s_j^1, \nu_j^1\rangle, \langle s_j^2, \nu_j^2\rangle) \in \mathcal{B}$ для всех $0 \le j \le n$.
  Множество $S'' = \{s^*_{(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)} \mid (\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \in S' \wedge s_n^1 \downarrow \wedge s_n^2 \downarrow\}$.

- Множество T определим как объединение $T' \cup T''$, где

$$\Big(((\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha), \tau, \delta, \lambda, (\rho_1^{\alpha'}, \rho_2^{\alpha'})) \in T', \text{ где}$$
$$\delta = \bigwedge_{x \in X_i, i=1,2} (x = \nu_{n-1}^i(x) + (d_n - d_{n-1})) \text{ и}$$
$$\lambda = \{x_i \in X_i \mid i = 1,2 \wedge \nu_n^i(x_i) = 0\}\Big)$$
$$\Updownarrow$$
$$\Big(\rho_i^\alpha \;:\; \langle s_0^i, \nu_0^i \rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1^i, \nu_1^i \rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_{n-1}]{\tau} \langle s_{n-1}^i, \nu_{n-1}^i \rangle \text{ и}$$
$$\rho_i^{\alpha'} \;:\; \langle s_0^i, \nu_0^i \rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1^i, \nu_1^i \rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n^i, \nu_n^i \rangle (i = 1,2)\Big)$$

и

$$((\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha), \alpha, x \geq 0, \emptyset, s^*_{(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)}) \in T''$$
$$\Updownarrow$$
$$(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \in S', \;\; s^*_{(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)} \in S''.$$

По построению очевидно, что $\mathcal{T}$ является временной системой переходов.

В дополнении к определенным выше двум отображениям η_1' и η_2' определим отображения $\mu_i' : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_i$ $(i = 1,2)$ по правилу $\mu_i'(s^*_{(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)}) = s_n^i$. Нетрудно убедится, что пары (μ_1', η_1') и (μ_2', η_2') являются wb-морфизмами в соответствии с определением 13.

Осталось проверить, что wb-морфизмы (μ_1', η_1') и (μ_2', η_2') являются $\mathcal{P}_{wbis}$-открытыми морфизмами. Воспользуемся теоремой 7 и покажем, что (μ_1', η_1') является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым морфизмом. Пусть $\langle s, \nu \rangle$ — τ-достижимая конфигурация в $\mathcal{T}$ и $\nu' = \nu + t$ — функция временного прогресса. По построению временной системы переходов $\mathcal{T}$ получаем, что $s = (\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)$. Проверим выполнение условий теоремы 7:

- Пусть $\mu_1((\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)) \xrightarrow[\delta', \lambda']{\tau} s_1'$ и $\|\eta_1^{-1}(\nu')\|_{X'} \in \|\delta'\|_{X'}$. Тогда по построению $\mathcal{T}$ получаем, что $\rho_i^\alpha \;:\; \langle s_0^i, \nu_0^i \rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1^i, \nu_1^i \rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n^i, \nu_n^i \rangle$ $(i = 1,2)$ — две последовательности выполнения в $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ соответственно, порождающие одно и тоже временное слово $\alpha = (\tau, d_1) \ldots (\tau, d_n)$, и, кроме того, $(\langle s_j^1, \nu_j^1 \rangle, \langle s_j^2, \nu_j^2 \rangle) \in \mathcal{B}$ для всех $0 \leq j \leq n$. Таким образом, имеем, что $\mu_1((\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)) = s_n^1 \xrightarrow[\delta', \lambda']{\tau} s_1'$. Отсюда по определению отношения $\xrightarrow[d]{\tau}$ получаем, что $\langle s_n^1, \nu_n^1 \rangle \xrightarrow[d']{\tau} \langle s', \eta_1^{-1}(\nu') \rangle$.

  Далее так как $\mathcal{B}$ — слабое бисимуляционное отношение, удовлет-

воряющее определению 17, $(\langle s_n^1, \nu_n^1\rangle, \langle s_n^2, \nu_n^2\rangle) \in \mathcal{B}$ и $\langle s_n^1, \nu_n^1\rangle \xrightarrow[d']{\tau} \langle s_1', \eta_1^{-1}(\nu')\rangle$, то получаем существование конфигурации $\langle s_2', \nu_2'\rangle$ такой, что $\langle s_n^2, \nu_n^2\rangle \xrightarrow[d']{\tau} \langle s_2', \nu_2'\rangle$ и, кроме того, $(\langle s_1', \eta_1^{-1}(\nu')\rangle, \langle s_2', \nu_2'\rangle) \in \mathcal{B}$. Пусть $\rho_i^{\alpha'} : \langle s_0^i, \nu_0^i\rangle \xrightarrow[d_1]{\tau} \langle s_1^i, \nu_1^i\rangle \xrightarrow[d_2]{\tau} \ldots \xrightarrow[d_n]{\tau} \langle s_n^i, \nu_n^i\rangle \xrightarrow[d']{\tau} \langle s_i', \nu_i'\rangle$ $(i = 1, 2)$, где $\nu_1' = \eta_1^{-1}(\nu')$. По построению $\mathcal{T}$ очевидно, что $(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \xrightarrow[\delta,\lambda]{\tau} (\rho_1^{\alpha'}, \rho_2^{\alpha'})$. Кроме того, $\mu_1((\rho_1^{\alpha'}, \rho_2^{\alpha'})) = s_1'$, $\|\nu'\|_X = \|\eta_1(\nu_1')\|_X \in \|\delta\|_X$ и $\lambda' = \eta_1^{-1}(\lambda)$;
- Пусть $\mu_1((\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha)) \downarrow$. Это означает, что $s_n^1 \downarrow$. Далее, так как $\mathcal{B}$ — слабое бисимуляционное отношение, удовлетворяющее определению 17, $(\langle s_n^1, \nu_n^1\rangle, \langle s_n^2, \nu_n^2\rangle) \in \mathcal{B}$ и $s_n^1 \downarrow$, то $s_n^2 \downarrow$. Тогда по построению $\mathcal{T}$ заключаем, что $(\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha) \downarrow$.

Таким образом, по теореме 7 получаем, что (μ_1, η_1) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым морфизмом. Аналогичным образом доказываем, что (μ_2, η_2) является $\mathcal{P}_{wbis}$-открытым морфизмом.

По определению $\mathcal{P}_{wbis}$-бисимуляции получаем, что $\mathcal{T}_1 \sim_{\mathcal{P}_{wbis}} \mathcal{T}_2$. $\square$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была сделана попытка применить методы теории открытых морфизмов при исследовании временных вариантов различных эквивалентностей для автоматных моделей с непрерывным временем. В частности, получены теоретико-категорные характеризации временной тестовой эквивалентности и временной слабой бисимуляции по Милнеру и Сангиорги. В дальнейшем планируется применить полученные результаты при решении проблемы разрешимости для вышеуказанных эквивалентностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.** Лекции по теории категорий. — Москва: Наука, 1974. — 438 с.
2. **De Nicola R., Hennessy M.** Testing equivalence for processes // Theoretical Comput. Sci. — 1984. — Vol. 34. — P. 83–133.
3. **Hennessy M., Milner R.** Algebraic laws for nondeterminism and cocurrency // J. of ACM. — 1985. — Vol. 32. — P. 137–162.
4. **Hoare C.A.R.**, Communicating Sequential Processes. // Prentice-Hall. — 1985.
5. **Hune T., Nielsen M.** Timed bisimulation and open maps. — Denmark. — 1998. — (Tech. Rep. / BRICS; N RS-98-4).

6. **Joyal A., Nielsen M., Winskel G.** Bisimulation from open maps // Information and Computation. — 1996. — Vol. 127(2). — P. 164–185.
7. **Katoen J.-P., Langerak R., Latella D., Brinksma E.** On specifying real-time systems in a causality-based setting // Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — Vol. 1135. — P. 385–404.
8. **Milner R., Sangiorgi D.** Barbed bisimulation.// Proc. 19-th Internat. Colloquium in Automata, Languarges and Programming, — Austria, Springer-Verlag, 1992. — P.685–695.— (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 623).
9. **Murphy D.** Time and duration in noninterleaving concurrency. // Fundamenta Informaticae. — 1993. — Vol. 19. — P. 403–416.
10. **Nielsen M., Cheng A.** Observing behaviour categorically // Lect. Notes Comput. Sci. — 1996. — Vol. 1026. — P. 263–278.
11. **Park D.** Concurrency and automata on infinite sequences // Lect. Notes Comp. Sci. — 1981. — Vol. 154. — P. 561–572.
12. **Winskel G.** An introduction to event structures // Lect. Notes Comput. Sci. — 1989. — Vol. 354. — P. 364–397.
13. **Yoneda T., Shibayama A., Schligloff B. H., Clarke E. M.** Efficient verification of parallel real-time systems // Lect. Notes Comput. Sci. — 1993. — Vol. 697. — P. 321-333.

Н. С. Грибовская

ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ НА ВРЕМЕННЫХ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЯХ

Препринт
119

Рукопись поступила в редакцию 27.10.2004

Рецензент В. Н. Касьянов

Редактор З. В. Скок

Подписано в печать 15.12.2004

Формат бумаги Объем 2,3 уч.-изд.л., 2,4 п.л.

Тираж 60 экз.

ЗАО РИЦ “Прайс-курьер” 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 6, тел. (383-2) 34-22-02