

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

**«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи



Аркашов Николай Сергеевич

**АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ДАННЫХ  
АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА**

Специальность 05.13.17 — Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2019

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. О свойствах случайных процессов сдвига на самоподобных континуумах</b>	<b>25</b>
1.1 Введение . . . . .	25
1.2 Мера Хаусдорфа. Множества с самоподобной структурой	26
1.3 Параметризация самоподобных множеств символьным пространством . . . . .	29
1.4 Процессы сдвига с траекториями на самоподобных континуумах . . . . .	32
1.5 Доказательство утверждений . . . . .	36
1.6 Результаты главы 1 . . . . .	48
<b>Глава 2. Геометрическая модель аномальных процессов переноса</b>	<b>49</b>
2.1 Введение . . . . .	49
2.2 Самоподобные множества, параметризуемые числовой прямой . . . . .	50
2.3 Случайное блуждание на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой . . . . .	60
2.4 Доказательство утверждений . . . . .	63
2.5 Результаты главы 2 . . . . .	91

<b>Глава 3. Аномальная диффузия как деформация классической диффузии</b>	<b>93</b>
3.1 Введение . . . . .	93
3.2 Предварительные обозначения и утверждения . . . . .	94
3.3 Информационная модель аномальной диффузии на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой . . . . .	101
3.4 Доказательство утверждений . . . . .	106
3.5 Результаты главы 3 . . . . .	115
<b>Глава 4. Динамика формирования процессов аномальной диффузии</b>	<b>116</b>
4.1 Введение . . . . .	116
4.2 Геометрическая структура сингулярных зон в модели суб- и супердиффузии . . . . .	121
4.3 Стационарные процессы и квазичастицы . . . . .	128
4.3.1 Теорема об устойчивости спектральной плотности . . . . .	131
4.3.2 Построение геометрии квазичастиц . . . . .	132
4.4 Перенос энергии и импульса при смене топологии . . . . .	135
4.4.1 Супердиффузионный режим переноса . . . . .	136
4.4.2 Субдиффузионный режим переноса . . . . .	141
4.5 Доказательство утверждений . . . . .	143
4.6 Результаты главы 4 . . . . .	148

<b>Глава 5. Модель случайного блуждания, определяемая структурой потока памяти и стохастической моделью сил</b>	<b>150</b>
5.1 Введение . . . . .	150
5.2 Построение информационной модели процесса аномальной диффузии . . . . .	154
5.3 Формирование памяти частицы по степенной функции и лестнице Кантора. Теорема о соотношении нелокальностей . . . . .	159
5.4 Предельная теорема. Метод вычисления параметров нелокальности . . . . .	163
5.5 Предельная теорема в случае $H = 1/2$ . . . . .	168
5.6 Случай правильно меняющейся функции памяти . . .	170
5.7 Физический смысл параметров нелокальности . . . .	174
5.8 Доказательство утверждений . . . . .	176
5.8.1 Доказательство теоремы 5.2 . . . . .	188
5.8.2 Доказательство утверждений раздела 5.5 . . .	189
5.8.3 Доказательство утверждений раздела 5.6 . . .	217
5.9 Результаты главы 5 . . . . .	227
<b>Глава 6. Методология анализа временного ряда плотности плазмы</b>	<b>229</b>
6.1 Введение . . . . .	229

6.2	Основные определения, структура главы и структура изучаемых данных . . . . .	231
6.3	Методология оценки адекватности модели . . . . .	236
6.3.1	Алгоритм вычисления параметра Хёрста. . . . .	236
6.3.2	Метод проверки стационарности . . . . .	237
6.3.3	Метод моделирования стационарного шума . . . . .	242
6.3.4	Метод моделирования нестационарного шума . . . . .	246
6.4	Численные результаты . . . . .	247
6.5	Модель блуждания . . . . .	255
6.6	Результаты главы 6 . . . . .	255
	<b>Заключение</b>	<b>257</b>
	<b>Литература</b>	<b>262</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Аномальным процессом переноса<sup>1</sup> называется процесс переноса, для которого имеет место свойство «дальней зависимости» приращений соответствующего процесса блуждания. Обозначенные процессы являются *объектом исследования* настоящей диссертации.

Предмет исследования — структурные данные аномальных процессов переноса, а именно: 1) математические модели физических процессов переноса на фрактальных структурах, приведенные в целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса (см. <sup>2</sup>, <sup>3</sup>), 2) информация об аномальных процессах переноса, представленная в виде временных рядов.

Цель диссертации — построение и исследование моделей анализа структурных данных аномальных процессов переноса. Упомянутые модели анализа строятся и исследуются в двух направлениях. Далее мы приведем краткое описание каждого из них.

При исследовании аномальных процессов переноса на фрактальных структурах рассматривается нарушение закона Эйнштейна линейного роста по времени среднего квадрата перемещения блуждающих частиц. В случае степенной зависимости среднего квадрата от времени выделяют два случая: супердиффузия, когда показа-

---

<sup>1</sup>В литературе часто вместе с термином «аномальный процесс переноса» используется синонимичный термин «процесс аномальной диффузии».

<sup>2</sup>Gefen Y., Aharony A., Alexander S. Anomalous Diffusion on Percolating Clusters // Phys. Rev. Lett. — 1983. — V. 50, №1. — P. 77–80.

<sup>3</sup>Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. — 2004. — Т. 174, №8. — С. 819–852.

тель степени больше единицы и частицы перемещаются, совершая «длинные полеты», и субдиффузия, когда показатель степени меньше единицы и частицы испытывают «задержки», при этом в первом случае выделяются «зоны длинных полетов», а во втором — «зоны задержки частиц», называемые сингулярными зонами. Возникает *задача структурного анализа известных моделей блуждания по множествам с самоподобной структурой* с целью их формализации и построения информационной модели, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса и обеспечивающей более глубокий анализ упомянутых моделей блуждания, в частности, реализующей прогноз динамики формирования режимов переноса. Отметим, что ранее (см. <sup>1</sup>) ставился вопрос о поиске универсального формата аномальных процессов переноса исходя из наличия сингулярных зон и свойства масштабной инвариантности этих процессов.

Перейдем к описанию второго направления. Рассматривается временной ряд с упомянутым выше свойством «дальней зависимости». Отметим, что процессы, протекающие на финансовых рынках и в турбулентной плазме, удовлетворяют этому свойству (см. <sup>2</sup>). Таким образом, возникает *задача анализа обозначенного временного ряда* и построения вероятностно-статистической модели, обеспечивающей

<sup>1</sup>Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

<sup>2</sup>Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007.

более тонкий анализ этих данных, в частности, реализующей физическую интерпретацию и вычисление параметров, характеризующих нелокальность воздействия среды и памяти частиц.

Математическое моделирование аномальных процессов переноса частиц связано с многочисленными приложениями, например, можно привести работы К. В. Чукбара, Л. М. Зеленого, А. В. Милованова, В. П. Будаева по моделированию явлений переноса в плазме, работы Р. Р. Нигматуллина, А. И. Олемского, А. Я. Флата, посвященные концепции фрактала в физике конденсированной среды и пр. При этом в литературе имеют место два основных подхода к анализу процессов диффузии. Первый подход связан с описанием плотности распределения частиц диффузанта. Для этой плотности, при определенных предположениях, можно вывести так называемое уравнение нормальной диффузии. Второй подход связан с тем, что согласно функциональной центральной предельной теореме случайные ломаные, построенные по центрированным и нормированным суммам случайных величин, также при определенных условиях, сходятся к стандартному винеровскому процессу (см. [4]). Этот подход основан на описании вероятностных свойств выделенной частицы-диффузанта. Первый метод моделирования будем называть статистическим, а второй – методом случайных блужданий. Отметим, что для описания аномальной диффузии используется как первый, так и второй подход (см. [13], [30], [34], [56] и др.). К известным моделям



аномальных процессов переноса частиц относятся модели дробной кинетики, основывающиеся на дробном законе Фика, СТ<sub>TRW</sub>-модели случайного блуждания и другие, построенные как обобщения уравнения Фокера-Планка (см. обзор известных авторов <sup>1</sup>). Обозначенные модели обладают следующими недостатками. Первое, ни одна из них не претендует на общую модель подобно тому, как винеровский процесс является моделью броуновского движения (см. известную монографию Г. М. Заславского «Гамильтонов хаос и фрактальная динамика»<sup>2</sup>). В связи с этим отметим, что предпринимались многочисленные попытки объяснить неприменимость центральной предельной теоремы к анализу реальных случайных процессов. Например, Б. Мандельброт (см. <sup>3</sup>) предложил использовать вместо нормального так называемые устойчивые законы, при этом возникает условие отсутствия дисперсии у приращений рассматриваемого процесса. Тем не менее, в большинстве приложений при анализе данных нет оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс (см. <sup>4</sup>). Второе, дробный закон Фика, лежащий в основании дробной кинетики, и его аналоги носят формально-феноменологическую природу и не имеют такого ясного физического смысла и не выпол-

<sup>1</sup>Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics Reports*. — 2000. — Vol. 339, iss. 1. — P. 1–77.

<sup>2</sup>Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

<sup>3</sup>Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // *J. Business*. — 1963. — Vol. 36, P. 394–419.

<sup>4</sup>Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007.

няют той роли, которую играет классический закон Фика, лежащий в основе вывода уравнения диффузии. Третье, аномальность переноса определяется наличием сингулярных зон и их структурой, однако в обозначенных выше моделях отсутствуют динамические условия формирования упомянутых сингулярных зон. Кроме того, принято считать, что режим аномальности переноса (суб- и супердиффузионный) определяется «конкуренцией» пространственно-временных нелокальностей, но в указанных моделях отсутствует связь динамики процесса и меры аномальности, определяемой этой динамикой.

Далее отметим, что в теории турбулентности нет единой математической модели, позволяющей описать все многообразие эффектов, происходящих в турбулентных потоках, вследствие чего в теории турбулентности имеется большое количество феноменологических моделей, направленных на описание конкретных эффектов (см., например, обзор [24]). Вместе с тем эффекты пристеночной турбулентности в токамаках приводят к повышенному переносу плазмы поперек удерживающего ее магнитного поля — аномальной диффузии (см. <sup>1</sup>). Динамика аномального переноса здесь связана с движением крупномасштабных структур, называемых «блобами» или «берстами» (англ. blobs, burst), что роднит эти процессы с процессами, протекающими на финансовых рынках, где информированность участников о финансовых индексах также создает крупно-

---

<sup>1</sup>Будаев В. П., Савин С. П., Зеленый Л. М. Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // УФН. — 2011. — Т. 189, №9. — С. 905-952.

масштабные структуры (см. [20]). Таким образом, можно говорить об актуальном направлении по анализу информации об аномальных процессах переноса в турбулентных потоках и финансовых рынках, построению информационных моделей, описывающих режимы переноса этих процессов и реализующих прогноз их динамики.

Резюмируя все вышесказанное, можно сделать вывод, что исследования в области математического моделирования и анализа аномальных процессов переноса далеки от своего завершения и в настоящее время активно развиваются. Диссертация направлена на разработку моделей анализа аномальных процессов переноса, которые позволяют на основании информации о «зонах задержки частиц» и «зонах длинных полетов» (зонах сингулярности) или же информации о последовательных состояниях процесса получать соотношения, отражающие динамику формирования и развития аномальных процессов переноса.

## Цель работы

Целью работы является разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа структурных данных аномальных процессов переноса. В рамках указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Построить геометрические структуры и меры на них, моделирующие фазовые пространства и сингулярные зоны аномальных процессов переноса.
2. На основе структурного анализа и сопоставления известных моделей физических процессов переноса на фрактальных структурах построить класс процессов случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой и степенным по времени изменением дисперсии.
3. Применить построенный класс процессов случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой к формированию информационной модели, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. На основе этой модели реализовать прогноз динамики перехода от диффузионного к аномальному режиму переноса.
4. Построить класс процессов случайного блуждания на основе закона изменения импульса, определяемого действием стохастических сил, распределенных по времени функцией памяти (или, по-другому, на основе феноменологии потока памяти).

- 4.1. Получить физическую интерпретацию управляющих параметров процессов из этого класса. На основе упомянутого класса реализовать информационную модель аномальной диффузии, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. Исследовать устойчивость этой модели при изменении ее состояний.
- 4.2. Получить аппроксимационные теоремы для обозначенного класса процессов. Используя эти теоремы, получить метод вычисления управляющих параметров этих процессов, а также построить статистические тесты, которые на определенном уровне значимости позволяют проверять адекватность построенной модели аномального переноса по ее соответствию экспериментальным данным.
5. Используя модель нестационарного шума, основанную на феноменологии потока памяти, разработать методологию анализа плотности плазмы термоядерной установки. В рамках этой методологии установить адекватность модели нестационарного шума по соответствию экспериментальным данным, а также получить метод вычисления ее управляющих параметров. Получить метод имитационного моделирования временного ряда значений плотности плазмы.

## **Методы исследования**

Обоснование построенных моделей анализа структурных данных

и соответствующих алгоритмов основано на применении методов геометрической теории функций, классических методах доказательства предельных теорем теории вероятностей в функциональных пространствах. При этом представленный в диссертации подход к обоснованию упомянутых моделей анализа содержит следующие четыре принципиальных момента.

1. Объединение расширяющейся системы вложенных самоподобных множеств является фазовым пространством исследуемых случайных блужданий. Параметризация этого объединения числовой прямой осуществляется с помощью непрерывной параметризации самоподобных множеств пространством последовательностей из конечного алфавита (символьным пространством).
2. Нелинейный рост по времени среднего квадрата случайных перемещений сопоставляется с тем, что топология, в которой реализуется блуждание частиц, и метрическая топология, в которой измеряются перемещения блуждающих частиц, являются неэквивалентными. Структуры неэквивалентных метрических топологий формируются, используя канторовы лестницы. В результате такого подхода реализуются геометрические модели деформации классического процесса блуждания в аномальные процессы переноса. При этом показатели степени нелинейности роста по времени среднего квадрата перемещений оказываются связанными с размерностями Хаусдорфа канторовых множеств, на

которых моделируется блуждание.

3. Деформации классического процесса блуждания в аномальные процессы переноса ставится в соответствие деформация стационарных процессов. Соотношение между спектральными плотностями соответствующих стационарных процессов позволяет сформулировать динамические уравнения взаимодействия диффундирующих частиц с внешней средой.
4. Взаимодействие диффундирующих частиц с внешней средой моделируется с помощью стационарной последовательности, при этом память частицы о предыдущих воздействиях моделируется с использованием феноменологии потока памяти. Такой подход приводит к случайному блужданию с нестационарными приращениями. Аппроксимация этого случайного блуждания гауссовским процессом лежит в основе полученных в работе алгоритмов анализа временных рядов.

**Основные результаты** (приведены ссылки на статьи, опубликованные автором)

1. С использованием пространства последовательностей из конечного алфавита (символьного пространства) получен метод кодирования геометрических структур, моделирующих фазовые пространства аномальных процессов переноса [69], [70].
2. На основе структурного анализа математических моделей физи-

ческих процессов аномального переноса на фрактальных структурах, в частности анализа параметра степенного изменения дисперсии и сингулярных зон этих процессов, построена модель случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой [63], [64], [69], [70].

3. Построена информационная модель, реализующая суб- и супердиффузионный режим переноса. На основе этой модели получена динамическая модель деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии, в частности, получены динамические соотношения формирования упомянутых режимов [70], [71], [72], [76].
4. В рамках феноменологии потока памяти построен класс случайных процессов, для представителей которого при условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим. Получена физическая интерпретация управляющих параметров процессов из этого класса как параметров, характеризующих нелокальность воздействия среды и памяти частиц. Получен метод вычисления упомянутых параметров на основе предельных теорем для процессов обозначенного класса [62], [65], [66], [67], [68], [73], [74], [77].
5. Разработана методология анализа плотности плазмы термоядерной установки, основанная на модели нестационарного шума, построенной в соответствии с феноменологией потока памя-



ти. В рамках этой методологии проведено теоретическое обоснование адекватности используемой модели, кроме того, построен статистический тест (решающее правило) проверки адекватности модели нестационарного шума по ее соответствию экспериментальным данным. Получен метод моделирования временного ряда значений плотности плазмы, основанный на методе обратной функции моделирования негауссовских процессов [73], [75], [77].

### **Апробация работы**

Все разделы диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях:

- IV International Conference on Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications, Novosibirsk, 21–25 August 2006.
- Прикладной и геометрический анализ, Самарканд, Узбекистан, 22–25 сент. 2014.
- Марчуковские научные чтения, Новосибирск, 25 июня–14 июля 2017.
- Марчуковские научные чтения, Новосибирск, 1–5 июля 2019.
- International Conference on Geometric Analysis in honor of the 90th anniversary of academician Yu. G. Reshetnyak, Novosibirsk, 22–28 September 2019.

Кроме того, основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались:

- на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики ИМ СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова;
- на объединенном семинаре кафедры инженерной и высшей математики Новосибирского государственного технического университета под руководством профессора В. А. Селезнева.

### **Публикации**

По теме диссертации автором опубликовано 22 работы, в том числе 16 журнальных статей, входящих в перечень ВАК, среди которых 12 статей индексируемых в базах цитирования (RSCI, SCOPUS, WoS).

### **Личный вклад автора**

Диссертационная работа выполнена непосредственно ее автором.

В совместных работах [65], [67], [71] автору диссертации принадлежат доказательства утверждений; в работе [62] — постановка задачи, доказательство утверждений и разработка алгоритмов, интерпретация результатов расчетов; в работах [63], [64], [69], [72], [73], [76] — постановка задачи и доказательство утверждений. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

## Обзор литературы

Прежде всего выделим знаменитую работу Эйнштейна «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты», опубликованную в 1905 году (см. [45]). В этой работе продемонстрирован вероятностно-статистический подход к анализу данных, а именно: математическое описание броуновского движения было получено с помощью классических законов физики на основе анализа хаотического поведения взвешенных в неподвижной жидкости частиц. На выведенном в результате этого анализа соотношении линейной зависимости среднего квадрата перемещения броуновской частицы от времени основан один из первых способов вычисления числа Авогадро (см. также [37]). Формализация броуновского движения с помощью языка теории случайных процессов реализована основателем кибернетики Н. Винером в его диссертации (1918 г.) и более поздних работах [61]. Дальнейшее изучение вероятностных свойств винеровского процесса было предпринято П. Леви [52], [22], К. Ито и Г. Маккином [16]. Винеровский процесс как случайный процесс с непрерывными почти наверное траекториями, независимыми приращениями и линейным ростом по времени дисперсии является наиболее известной моделью броуновского движения (см. [52], [22], [16], [17], [33]). Отметим, однако, что уже в 1926 году Л. Ричардсон (см. [59]) при исследовании атмосферной турбулентности обнаружил, что средний квадрат пе-

ремещения частицы имеет степенное поведение с показателем 3, что означает супердиффузионный режим переноса. При этом оказалось, что, тип дифференциального уравнения, описывающего указанный перенос отличается от уравнения нормальной диффузии.

Эффект нелинейного роста стандартного отклонения сумм был обнаружен также Хёрстом [49] для ряда природных явлений (речного стока, колец на деревьях и т. д.). Модель случайного процесса со степенным ростом дисперсии и стационарными приращениями впервые предложил А. Н. Колмогоров в 1940 году [19]. В 1968 г. Б. Мандельброт и ван Несс [54] исследовали свойства обозначенного случайного процесса и назвали его фрактальным броуновским движением. В 1963 г. Б. Мандельброт предложил использовать для анализа реальных хаотических процессов устойчивые законы. В 1965 г. Э. Монтроллом и Д. Вайсом [57] была введена модель блуждания в непрерывном времени (STRW-модель) как обобщение процесса физической диффузии для описания аномальной диффузии. Отметим, что STRW-модель определяется последовательностью времен ожидания и скачков. В [58] была установлена связь между STRW-моделью и уравнениями аномальной диффузии с дробными производными по времени.

Резюмируя, в литературе выделяются два подхода к формированию процессов аномальной диффузии: первый подход состоит в использовании дробного (фрактального) броуновского движения, а

второй — в использовании CTRW-модели. В первом случае в зависимости от значения параметра Хёрста, определяющего «сильную зависимость» приращений процесса на непересекающихся временных интервалах, может возникнуть как суб- так и супердиффузионный режим. Во втором случае используется техника устойчивых распределений, при этом суб- и супердиффузионный режим процесса определяется отношением параметров устойчивых распределений, соответствующих времени ожидания и величине скачка частицы, участвующей в блуждании. В супердиффузионном режиме применяется техника устойчивых распределений с бесконечным вторым моментом. Второй подход приводит к уравнениям аномальной диффузии (см., [56], [34], [60]). Попытка связать показатели аномальности уравнений аномальной диффузии с динамикой процесса приводит к аналогу уравнения Фика с дробным градиентом (см. [34]).

В 1983 г. Б. Мандельброт ввел термин «фрактальная геометрия», при этом в [55] продемонстрировал необычайно широкий круг объектов и явлений, приводящих к формированию множеств, подобных в определенном смысле своей части, так называемых фрактальных множеств. В [31], [25] установлена связь между физической системой с потерями, описываемой дифференциальным уравнением с дробным оператором дифференцирования, и множеством Кантора, моделирующим эти потери, причем показатель производной в этом

уравнении связан с размерностью Хаусдорфа множества Кантора. Память системы о предыдущих воздействиях реализуется с помощью феноменологии потока памяти, суть которой в следующем: изменение импульса определяется действием сил, распределенных по времени некоторой функцией памяти. В качестве такой функции памяти в [31], [25] выступает лестница Кантора. Память в этом случае формируется из разряженных импульсов с неубывающей амплитудой, доля этих импульсов указывает на долю состояний системы, сохранившихся за время эволюции системы.

Работа [48] является одной из первых работ, где на основе анализа блуждания по перколяционным кластерам получено, что средний квадрат перемещения ведет себя степенным образом и показатель степенного изменения связан с размерностными характеристиками пространства, по которому происходит блуждание. В [14], а также в работах [13], [36] ставился вопрос об адекватном теоретико-вероятностном обосновании и построении моделей аномальных процессов переноса на фрактальных структурах.

### **Структура работы**

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованных источников из 83 наименований. Работа изложена на 277 страницах, включая 6 иллюстраций.

Приведем краткое содержание каждой главы.

- В первой главе с помощью преобразования сдвига на символъ-

ном пространстве определены стационарные процессы с траекториями всюду плотными на самоподобных континуумах с нормированной мерой Хаусдорфа. Элементы анализа, развитые в первой главе, позволяют в дальнейших моделях исследовать сингулярные зоны фазовых пространств аномальных процессов переноса.

- Во второй главе дано геометрическое представление случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой и степенным изменением дисперсии. Построенная модель объясняет возникающую нелинейность по времени среднего квадрата так называемых аномальных процессов переноса.
- В третьей главе на основании реализации вложения случайных процессов, построенной во второй главе, доказываем, что классическое случайное блуждание в зависимости от топологии наблюдения реализуется как аномальная диффузия с суб- или супердиффузионным режимом переноса. Основным итогом третьей главы является построение информационной модели, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса.
- В четвертой главе на основе полученной в третьей главе информационной модели устанавливаются динамические причины деформации процесса классической диффузии. Уравнение динамики для суб- и супердиффузионного режимов возникает в

виде закона взаимодействия квазичастиц и является аналогом уравнения динамики взаимодействия фотона и электрона.

- В пятой главе построена модель случайного блуждания, в которой соотношение пространственно-временных нелокальностей определяется структурой потока памяти и стохастической моделью сил. Предлагаемая модель позволяет на основании анализа выборочных данных вычислять параметры, характеризующие нелокальность воздействия среды и памяти частицы.
- В шестой главе в рамках феноменологии потока памяти построена модель нестационарного шума, которая применена для стохастического анализа и моделирования временного ряда значений плотности плазмы термоядерной установки. Приведен статистический тест (решающее правило), который на определенном уровне значимости позволяет проверять адекватность предложенной модели по ее соответствию экспериментальным данным.



## ГЛАВА 1

### О свойствах случайных процессов сдвига на самоподобных континуумах

#### 1.1 Введение

В настоящей главе исследуются свойства преобразований самоподобного континуума, когда эти преобразования полусопряжены преобразованию сдвига на символьном пространстве, кодирующем этот самоподобный континуум. Устанавливается, что последовательность композиций преобразования из указанного класса преобразований является стационарным процессом на самоподобном континууме с нормированной мерой Хаусдорфа. В следующих главах именно с помощью стационарных процессов будет формироваться информация о воздействии внешней среды на диффундирующую среду в аномальных процессах переноса.

Основными результатами главы являются теорема 1.7, следствие 1.2 и предложение 1.3. Доказательство этих утверждений, а также предложений 1.1, 1.2 и леммы 1.1 вынесено в раздел 1.5.

Основные результаты первой главы опубликованы в [70] и [72].

## 1.2 Мера Хаусдорфа. Множества с самоподобной структурой

Пусть  $X$  — метрическое пространство с метрикой  $\rho$ . Диаметром непустого множества  $A \subseteq X$  называется величина  $\text{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$ , диаметр пустого множества полагаем равным нулю. Открытым покрытием множества  $A$  называется любой не более чем счетный набор открытых множеств  $\{A_i\}$  такой, что  $A \subseteq \bigcup_i A_i$ .

Пусть  $d \geq 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим величину

$$\mu_\varepsilon^d(A) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i)^d : A \subseteq \bigcup_i A_i, \sup_i \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\},$$

где инфимум берется по всем открытым покрытиям множества  $A$ . Величина  $\mu_\varepsilon^d(A)$  не убывает при уменьшении  $\varepsilon$ , поэтому  $\mu_\varepsilon^d(A)$  имеет предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Положим

$$\mu^d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon^d(A).$$

Величина  $\mu^d(A)$  называется  $d$ -мерной мерой Хаусдорфа множества  $A$  (см., например, [38, гл. 3, §12], [44, §6.1]). Заметим, что  $d$ -мерная мера Хаусдорфа  $\mu^d$  является внешней мерой.

В виде теорем 1.1 и 1.2 сформулируем следующие два свойства хаусдорфовой меры (см. теоремы 5.4.4 и 6.1.9 в [44]).

**Теорема 1.1.** Пусть  $A, B \subseteq X$  и  $\text{dist}(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in$

$A, y \in B\} > 0$ . Тогда  $\mu^d(A \cup B) = \mu^d(A) + \mu^d(B)$ .

Для формулировки нижеследующей теоремы 1.2 нам понадобится известное определение.

**Определение 1.1.** *Отображение  $T : X \rightarrow X$  называется преобразованием подобия, если существует такое положительное  $r$ , что  $\rho(T(x), T(y)) = r\rho(x, y)$  для всех  $x, y \in X$ .*

Значение  $r$  будем в дальнейшем называть *коэффициентом преобразования подобия*. Если  $r \in (0, 1)$ , в этом случае такое преобразование подобия называется *сжимающим*.

Нам потребуется следующее утверждение (см., например, [44])

**Теорема 1.2.** *Пусть  $T : X \rightarrow X$  — преобразование подобия с коэффициентом  $r$ , пусть также  $d$  — действительное положительное число. Тогда  $\mu^d(T(A)) = r^d \mu^d(A)$  для всех  $A \subseteq X$ .*

Пусть задана внешняя мера  $\mu$  на множестве всех подмножеств пространства  $(X, \rho)$ . Дальнейшей нашей задачей будет построение достаточно богатой  $\sigma$ -алгебры множеств в  $X$ , обозначим ее через  $\mathcal{F}$ , так чтобы сужение внешней меры на  $\mathcal{F}$  оказалось мерой. В следующем определении 1.2 задается искомая  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{F}$ . В теореме 1.3 доказывается, что сужение соответствующей внешней меры на  $\mathcal{F}$  является мерой (см. теорему 5.2.5 в [44]).

**Определение 1.2.** *Пусть  $\mu$  — внешняя мера на  $X$ . Множество  $A$  хорошо разбивает множество  $B$ , если  $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$ .*

Множество  $A$  называется  $\mu$ -измеримым, если оно хорошо разбивает любое множество  $B \subseteq X$ .

**Теорема 1.3.** *Класс всех  $\mu$ -измеримых множеств является  $\sigma$ -алгеброй и сужение  $\mu$  на эту  $\sigma$ -алгебру является мерой.*

Итак, если  $\mu^d$  — мера Хаусдорфа, то искомой  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{F}$ , такой что сужение  $\mu^d$  на  $\mathcal{F}$  является мерой, может служить класс всех  $\mu^d$ -измеримых множеств. В следующем утверждении (см. теорему 5.4.2 в [44]) устанавливается, что класс всех  $\mu^d$ -измеримых множеств содержит борелевскую  $\sigma$ -алгебру.

**Теорема 1.4.** *Пусть  $\mu$  — внешняя мера на  $X$ , обладающая таким свойством: для любых  $A, B \subseteq X$  с  $\text{dist}(A, B) > 0$  верно, что  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . Тогда все борелевские множества  $\mu$ -измеримы.*

Борелевскую  $\sigma$ -алгебру множеств в  $X$  будем обозначать через  $\mathcal{B}$ . Из теорем 1.1 и 1.4 сразу вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.1.** *Сужение хаусдорфовой меры  $\mu^d$  на  $\mathcal{B}$  является борелевской мерой.*

Определим хаусдорфову размерность, для этого сформулируем теорему (см. теорему 6.1.6 в [44]).

**Теорема 1.5.** *Для любого множества  $A$  существует такое  $d_0 \in [0, +\infty]$ , что  $\mu^d(A) = 0$  при всех  $d > d_0$  и  $\mu^d(A) = +\infty$  при всех  $d < d_0$ .*

Число  $d_0$ , определенное в предыдущей теореме, называется *хаусдорфовой размерностью*  $A$ . Хаусдорфову размерность множества  $A$  мы будем обозначать через  $\dim(A)$ .

### 1.3 Параметризация самоподобных множеств символьным пространством

Следуя, например, [44], [46], выделим класс так называемых *самоподобных множеств*.

**Определение 1.3.** Будем называть непустое компактное множество  $A$  самоподобным, если существуют такие сжимающие преобразования подобия  $T_1, \dots, T_N$ , что имеет место такое представление:

$$A = \bigcup_{i=1}^N T_i(A)$$

при этом  $\mu^{\dim(A)}(T_i(A) \cap T_j(A)) = 0$  для всех  $i \neq j$ .

Определим класс самоподобных множеств  $\mathcal{S}$  таких, что  $\mu^{\dim(A)}(A) = 1$  для всех  $A \in \mathcal{S}$ . Отметим, что на пространстве с мерой  $(A, \mathcal{B}_A, \mu^{\dim(A)})$ , где  $\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$  мы в дальнейшем будем рассматривать «объекты, имеющие вероятностный характер» (см. ниже раздел 1.4).

Зафиксируем  $E \in \mathcal{S}$ , тогда  $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$ , где  $T_1, \dots, T_N$  сжимающие преобразования подобия с коэффициентами  $r_1, \dots, r_N$  соответственно. Из теоремы 1.2 следует, что размерность Хаусдорфа мно-

жества  $E$  удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^N r_i^{d_0} = 1, \quad (1)$$

где  $d_0 = \dim(E)$ .

Итак, рассмотрим самоподобное множество  $E$ , такое что  $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$ , где  $T_1, \dots, T_N$  сжимающие преобразования подобия с коэффициентами  $r_1, \dots, r_N$  соответственно. Пространство последовательностей  $\Sigma$  на  $N$  элементах  $\{1, 2, \dots, N\}$  определим как множество всех бесконечных последовательностей  $\sigma_1\sigma_2\dots$ ,  $\sigma_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Расстояние между  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots$  и  $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots$  определяется следующим образом: если  $\sigma_1 \neq \tau_1$ , то  $d(\sigma, \tau) = 1$ ; если  $\sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_k = \tau_k$  и  $\sigma_{k+1} \neq \tau_{k+1}$  для некоторого  $k \geq 1$ , то  $d(\sigma, \tau) = r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_k}$  (здесь  $r_{\sigma_1}, \dots, r_{\sigma_k}$  — коэффициенты преобразований подобия  $T_{\sigma_1}, \dots, T_{\sigma_k}$  соответственно); если же  $\sigma_k = \tau_k$  для всех  $k \geq 1$ , то  $d(\sigma, \tau) = 0$  (заметим, что в некоторых монографиях определенное выше пространство последовательностей называется символьным пространством см., например, [21, стр. 187]).

Пространство последовательностей  $(\Sigma, d)$  является метрическим пространством (см., например, [44, §4.2], [26, §4.1]). Следующая теорема позволяет «кодировать» каждую точку из  $E$  некоторой последовательностью из пространства последовательностей (см. теорему 4.2.3 в [44]).

**Теорема 1.6.** *Существует единственное непрерывное отображе-*

ние  $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ , такое что для любого  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots \in \Sigma$  выполняется

$$\Phi(\sigma) = T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2\sigma_3\dots)).$$

Кроме того,  $\Phi(\Sigma) = E$ .

Введем в рассмотрение множество

$$B_0 = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} (T_i(E) \cap T_j(E)) \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq N} E_{i_1, i_2, \dots, i_m} \right), \quad (2)$$

где  $E_{i_1, i_2, \dots, i_m} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} (T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_m} T_i(E) \cap T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_m} T_j(E))$ . Поскольку  $E \in \mathcal{S}$  получаем, что  $\mu^{\dim(E)}(B_0) = 0$ . Обозначим  $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$  через  $\Sigma_{E \setminus B_0}$ . Отметим одно свойство отображения  $\Phi$ .

**Предложение 1.1.** *Отображение  $\Phi$ , действующее из  $(\Sigma_{E \setminus B_0}, d)$  на  $(E \setminus B_0, \rho)$ , является гомеоморфизмом.*

**Замечание 1.1.** Если  $T_i(E) \cap T_j(E) = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ , то  $B_0 = \emptyset$ . В этом случае в силу предложения 1.1 отображение  $\Phi : (\Sigma, d) \rightarrow (E, \rho)$  является гомеоморфизмом.

Заметим, что, если  $B_0 \neq \emptyset$ , то прообраз  $\Phi^{-1}(x)$  любой точки  $x \in B_0$  состоит более чем из одной точки. Для того, чтобы избавиться от этой неоднозначности в символьном представлении, выберем в каждом из этих прообразов ровно одну любую точку, в итоге, получим множество  $\Sigma_{B_0} \subseteq \Phi^{-1}(B_0)$ . Обозначим  $\Sigma_{B_0} \cup \Sigma_{E \setminus B_0}$  через  $\Sigma'$ .

Отображение  $\Phi : \Sigma' \rightarrow E$  является взаимно-однозначным. Сужение отображения  $\Phi$  на множество  $\Sigma'$  будем обозначать через  $\Phi_0$ .

В обозначении меры  $\mu^{\dim(E)}(\cdot)$  в дальнейшем мы будем опускать верхний индекс. Через  $\mathcal{B}_E$  обозначается  $\sigma$ -алгебру борелевских множеств в  $E$ . Пополним  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}_E$ , а именно, обозначим через  $\mathcal{B}_E^*$  совокупность всех множеств вида  $B \cup C$ , где  $B \in \mathcal{B}_E$  и  $C \subset B_0$  (множество  $B_0$  определено в (2)). Очевидно, что  $\mathcal{B}_E^*$  является  $\sigma$ -алгеброй. В дальнейшем мы будем рассматривать следующее пространство с мерой:  $(E, \mathcal{B}_E^*, \mu)$ .

#### 1.4 Процессы сдвига с траекториями на самоподобных континуумах

**Определение 1.4.** *Отображение  $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , определенное следующим образом:*

$$S(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\dots) = \sigma_2\sigma_3\dots,$$

*называется преобразованием сдвига.*

Обратим внимание, что преобразование сдвига  $S : (\Sigma, d) \rightarrow (\Sigma, d)$  является непрерывным, утверждение непосредственно вытекает из построения метрики  $d$  на пространстве последовательностей  $\Sigma$ .

Рассмотрим отображение  $\Pi = \Phi \circ S \circ \Phi_0^{-1} : E \rightarrow E$ .

**Предложение 1.2.** *Для любого множества  $A \in \mathcal{B}_E^*$  выполняется*



соотношение

$$\Pi^{-1}(A) \in \mathcal{B}_E^*. \quad (3)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A). \quad (4)$$

Таким образом, преобразование  $\Pi$  является *преобразованием сохраняющим меру*.

Обратим внимание, что  $(E, \mathcal{B}_E^*, \mu)$  является вероятностным пространством. Отметим, что отображение  $\Pi^n$ ,  $n \geq 0$  можно понимать как случайный элемент, действующий из вероятностного пространства  $(E, \mathcal{B}^*(E), \mu)$  в  $(E, \mathcal{B}^*(E))$ . Последовательность  $\{\Pi^n\}_{n \geq 0}$  мы будем называть *процессом сдвига*. Отметим, что из предложения 1.2 следует стационарность этого процесса.

**Замечание 1.2.** Из леммы Каца (см. [13, стр. 188]) следует, что среднее время первого возвращения  $\tau(A)$  в некоторое множество  $A \in \mathcal{B}_E^*$  положительной меры при условии, что мы стартовали из этого множества является конечным (заметим, что в теореме Пуанкаре нет информации о времени возвращения). Определим  $\tau(A)$  более точно:

$$\tau(A) = \sum_{n=1}^{\infty} np(A, n),$$

где  $p(A, n) = \mu(\omega \in E : \Pi(\omega) \notin A, \dots, \Pi^{n-1}(\omega) \notin A, \Pi^n(\omega) \in A | \omega \in A)$ .

В частности, если  $A = T_k(E)$ , легко вычислить  $p(A, n)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} p(A, n) &= \mu \left( \bigcup_{i_1 \neq k, \dots, i_{n-1} \neq k} (T_k T_{i_1} \dots T_{i_{n-1}} T_k(E)) \right) / \mu(T_k(E)) \\ &= r_k^{d_0} \sum_{i_1 \neq k, \dots, i_{n-1} \neq k} r_{i_1}^{d_0} \dots r_{i_{n-1}}^{d_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $d_0 = \dim(E)$ . Далее, поскольку  $\sum_{i=1}^n r_i^{d_0} = 1$ , из (26) получаем  $p(A, n) = r_k^{d_0} (1 - r_k^{d_0})^{n-1}$ .

Множество  $A \in \mathcal{B}_E^*$  называется *инвариантным*, если  $\Pi^{-1}(A) = A$ .

Преобразование сохраняющее меру называется *эргодическим*, если мера любого инвариантного множества равна нулю или единице (см., например, [41]).

**Теорема 1.7.** *Преобразование  $\Pi$ , заданное на  $\mathcal{B}_E^*$ , является эргодическим.*

Следующее утверждение является следствием эргодичности преобразования  $\Pi$ .

**Следствие 1.2.** *Для почти всех  $\omega \in E$  траектория точки  $\omega$  (т. е. последовательность  $\{\Pi^n \omega\}$ ) всюду плотна в  $E$ .*

Далее, мы конкретизируем структуру каждого элемента последовательности  $(\Pi^n)_{n \geq 0}$ , кроме того, покажем, что, если  $E$  — множество

Кантора, то  $(\Pi^n)_{n \geq 0}$  имеет структуру скользящего среднего (см. ниже соотношение (8)).

Определим функцию  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , полагая  $\nu(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sigma_1$ . С помощью  $\nu$  определим функцию  $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $\eta(\omega) = \nu(\Phi_0^{-1}(\omega))$ . Зададим последовательность функций  $\xi_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 0$  следующим образом:  $\xi_n(\omega) = \eta(\Pi^n(\omega))$ . В предложении 1.3 утверждается, что функции  $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,  $n \geq 0$  являются измеримыми. Поскольку  $\mu$  является вероятностной мерой, поэтому в дальнейшем функции  $\xi_n$  будем называть *случайными величинами*.

**Предложение 1.3.** *Функции  $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,  $n \geq 0$  являются измеримыми. Случайные величины  $(\xi_n)_{n \geq 0}$  являются независимыми одинаково распределенными, при этом  $\xi_0$  имеет равномерное распределение на множестве  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Кроме того, для всех  $\omega \in E \setminus B_0$  выполняется равенство*

$$\Pi^n(\omega) = \Phi(\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots). \quad (6)$$

Выделим из класса самоподобных множеств класс канторовских множеств  $\{S_\alpha\}_{0 < \alpha < 1/2}$  на отрезке  $[0, 1]$ . Множество  $S_\alpha$  определяется двумя преобразованиями подобия  $T_1(x) = \alpha x$  и  $T_2(x) = \alpha x + 1 - \alpha$ , такими что  $S_\alpha = T_1(S_\alpha) \cup T_2(S_\alpha)$  и  $T_1(S_\alpha) \cap T_2(S_\alpha) = \emptyset$ . Заметим, что множество  $S_{1/3}$  — классическое множество Кантора.

**Лемма 1.1.** *Отображение  $\Phi$  пространства  $(\Sigma, d)$  на множество*

$S_\alpha, 0 < \alpha \leq 1/2$  имеет вид:

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\sigma_{j+1} - 1). \quad (7)$$

Из (6) и (7) выводим, что преобразование  $\Pi^n$  множества  $S_\alpha$  можно представить в виде

$$\Pi^n = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\xi_{n+j}^{(\alpha)} - 1), \quad (8)$$

где  $0 < \alpha \leq 1/2$ ,  $(\xi_n^{(\alpha)})$  — независимые одинаково распределенные случайные величины (индексом  $\alpha$  будем подчеркивать, что случайные величины заданы на вероятностном пространстве  $(S_\alpha, \mu_\alpha, \mathcal{B}^*(S_\alpha))$ , напомним, что  $\mu_\alpha = \mu^d$ ,  $d = -\ln 2 / \ln \alpha$ ). Из предложения 1.3 следует, что  $\mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 1) = \mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 2) = 1/2$ . Отметим, что процесс  $(\Pi^n)$  является стационарным процессом в узком смысле (см., например, [41]).

### 1.5 Доказательство утверждений

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.1. Покажем, что прообраз  $\Phi^{-1}(\omega)$  любого  $\omega \in E \setminus B_0$  состоит ровно из одного элемента. Предположим противное, пусть существуют  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots$  и  $\tau = \tau_1 \tau_2 \dots$ , такие что  $\tau \neq \gamma$ , но при этом  $\Phi(\gamma) = \Phi(\tau) = \omega$ . Пусть, скажем,  $\gamma_1 \neq \tau_1$ , но тогда  $\omega = T_{\gamma_1}(\Phi(\gamma_2 \dots)) = T_{\tau_1}(\Phi(\tau_2 \dots))$ , поэтому  $\omega \in T_{\gamma_1}(E) \cap T_{\tau_1}(E)$ , получили противоречие, поскольку  $\omega \in E \setminus B_0$ .

Пусть теперь  $\gamma_1 = \tau_1, \dots, \gamma_{k-1} = \tau_{k-1}$ , но  $\gamma_k < \tau_k$ , где  $k \geq 2$ . Тогда  $\omega = T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} \dots T_{\gamma_{k-1}} T_{\gamma_k} (\Phi(\gamma_{k+1} \dots)) = T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_{k-1}} T_{\tau_k} (\Phi(\tau_{k+1} \dots))$ , в этом случае  $\omega \in T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} \dots T_{\gamma_{k-1}} T_{\gamma_k} (E) \cap T_{\tau_1} T_{\tau_2} \dots T_{\tau_{k-1}} T_{\tau_k} (E)$ , но и в этом случае мы получили противоречие с условием  $\omega \in E \setminus B_0$ .

Напомним, что мы обозначили  $\Phi^{-1}(E \setminus B_0)$  через  $\Sigma_{E \setminus B_0}$ . Итак,  $\Phi$  определяет взаимно-однозначное отображение  $\Sigma_{E \setminus B_0}$  на  $E \setminus B_0$ .

Покажем, что  $\Phi^{-1}$  является непрерывным отображением  $E \setminus B_0$  на  $\Sigma_{E \setminus B_0}$ . Выберем произвольную точку  $x_0 \in E \setminus B_0$ . Возьмем произвольное положительное  $\varepsilon$ . Обозначим  $\max\{r_1, \dots, r_N\}$  через  $r$ . Выберем натуральное  $k$  таким образом, чтобы  $r^k < \varepsilon$ . В силу самоподобия множества  $E$ , а также в силу того что  $x_0 \notin B_0$ , найдутся, и притом единственным образом, такие  $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , что  $x_0 \in T_{i_1} \dots T_{i_k} (E)$ . Покажем, что существует такое  $\delta > 0$ , что  $B_{x_0}^\delta = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \delta\} \subseteq T_{i_1} \dots T_{i_k} (E)$ . Введем в рассмотрение  $\delta_1 = \rho(x_0, \bigcup_{j \neq i_k} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-1}} T_j (E))$ ,  $\delta_2 = \rho(x_0, \bigcup_{j \neq i_{k-1}} T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{k-2}} T_j (E))$ ,  $\dots$ ,  $\delta_{k-1} = \rho(x_0, \bigcup_{j \neq i_2} T_{i_1} T_j (E))$ ,  $\delta_k = \rho(x_0, \bigcup_{j \neq i_1} T_j (E))$ . Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ , заметим что  $\delta > 0$ , в силу того что  $x_0 \notin B_0$ . Исходя из построения  $\delta$ , для любой точки  $x$  из множества  $E$ , такой что  $\rho(x_0, x) < \delta$ , получаем последовательно:  $x \in T_{i_1} (E)$ ,  $x \in T_{i_1} T_{i_2} (E)$ ,  $\dots$ ,  $x \in T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k} (E)$ . Итак,  $B_{x_0}^\delta \subseteq T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_k} (E)$ . Следовательно, для любой  $x \in B_{x_0}^\delta \setminus B_0$  выполняется  $\Phi(x) = i_1 i_2 \dots i_k \dots$ , стало быть,  $d(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(x_0)) \leq r_{i_1} \dots r_{i_k} \leq r^k < \varepsilon$ . Тем самым, предложение доказано.

Для того чтобы установить истинность предложения 1.2 проведем доказательство следующих лемм.

Введем обозначение. Запись  $A = B(\text{mod } \mu)$  означает, что  $\mu(A \setminus B) = 0$  и  $\mu(B \setminus A) = 0$ .

**Лемма 1.2.** *Для любого множества  $A \subset E$  выполняется*

$$\Pi^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(A)(\text{mod } \mu). \quad (9)$$

Кроме того, для любого  $A \in \mathcal{B}_E^*$  имеет место соотношение (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую точку  $y \in \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0$  (см. (2)), пусть к тому же  $\Phi^{-1}(y) = \sigma_1 \sigma_2 \dots$ . В таком случае  $x = T_{\sigma_1}^{-1}(y) \in A \setminus B_0$ , отсюда мы получим, что  $y \in \Pi^{-1}(x)$ , поэтому

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \subseteq \Pi^{-1}(A). \quad (10)$$

Пусть  $x$  — некоторая точка, принадлежащая множеству  $A$ , тогда  $\Phi^{-1}(x) = \{\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots : \Phi(\sigma) = x\}$  и  $S^{-1} \circ \Phi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^N \{i\sigma : \Phi(\sigma) = x\}$ , но тогда, используя определение  $\Phi$ , получаем

$$\Phi \circ S^{-1} \circ \Phi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^N T_i(x). \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что

$$\Pi^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^N T_i(A). \quad (12)$$

В итоге, из (10) и (12) следует равенство (9). Далее, имеем равенство

$$\Pi^{-1}(A) = \left( \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \cup \left( \Pi^{-1}(A) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \right). \quad (13)$$

Из (12) следует, что для второго слагаемого в (13) выполняется включение

$$\Pi^{-1}(A) \setminus \left( \bigcup_{i=1}^N T_i(A) \setminus B_0 \right) \subseteq B_0. \quad (14)$$

Покажем, что для всякого  $A \in \mathcal{B}_E^*$  имеет место соотношение

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) \in \mathcal{B}_E^*. \quad (15)$$

Прежде всего  $A$  можно представить в виде  $B \cup C$ , где  $B \in \mathcal{B}_E$  и  $C \subseteq B_0$ . Стало быть,

$$\bigcup_{i=1}^N T_i(A) = \bigcup_{i=1}^N T_i(B) \cup \bigcup_{i=1}^N T_i(C). \quad (16)$$

Очевидно, что  $T_i(C) \subseteq T_i(B_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Из определения  $B_0$  (см. (2)) имеем  $T_i(B_0) \subseteq B_0$  для всех  $i$ , следовательно,  $\bigcup_{i=1}^N T_i(C) \subseteq B_0$ . Поэтому из (16) получаем (15). В итоге из (13), (14) и (15) выводим (3). Лемма доказана.

Из леммы 1.2 вытекает следующая лемма.

**Лемма 1.3.** *Для любого множества  $A \subset E$  и  $n \geq 1$  имеет место*

равенство

$$\Pi^{-n}(A) = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N} T_{i_1 \dots i_n}(A) \pmod{\mu}.$$

Перейдем к доказательству того, что преобразование  $\Pi$  сохраняет меру  $\mu$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.2. Прежде всего отметим, что соотношение (3) доказано в лемме 1.2. Докажем теперь равенство (4). Из леммы 1.2 следует, что  $\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu(\bigcup_{i=1}^N T_i(A))$ . Так как  $A \in \mathcal{B}_E^*$  и  $\mu(T_i(A) \cap T_j(A)) = 0$  при  $i \neq j$ , то  $\mu(\Pi^{-1}(A)) = \bigcup_{i=1}^N \mu(T_i(A))$ . Но  $\mu(T_i(A)) = r_i^{d_0} \mu(A)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $r_i$  — коэффициент преобразования  $T_i$  и  $d_0 = \dim(E)$ , поэтому выполняется равенство

$$\mu(\Pi^{-1}(A)) = \mu(A) \sum_{i=1}^N r_i^{d_0}.$$

Осталось воспользоваться равенством (1), чтобы получить утверждение предложения.

Установим истинность теоремы 1.7, для этого докажем следующие леммы.

**Лемма 1.4.** Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $k \geq 1$  и  $A \in \mathcal{B}_E^*$ . Тогда для всех  $n \geq k$  выполняется равенство

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(E)) = \mu(A) \mu(T_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(E)).$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1.3, получаем

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = \mu\left(\bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq N} T_{i_1} \dots T_{i_n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)\right).$$

Из предыдущего равенства выводим

$$\begin{aligned} & \mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) \\ &= \mu(T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(\bigcup_{1 \leq i_{k+1}, \dots, i_n \leq N} T_{i_{k+1}} \dots T_{i_n}(A))). \end{aligned} \quad (17)$$

Из равенства (17) и теоремы 1.2 получаем

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0} \sum_{1 \leq i_{k+1}, \dots, i_n \leq N} r_{i_{k+1}}^{d_0} \dots r_{i_n}^{d_0} \mu(A), \quad (18)$$

где  $d_0 = \dim(E)$ . Далее заметим, что выполняется равенство (см. (1))

$$\sum_{i=1}^N r_i^{d_0} = 1.$$

Откуда и из (18) выводим

$$\mu(\Pi^{-n}(A) \cap T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0} \mu(A). \quad (19)$$

Осталось обратить внимание на то, что (см. теорему 1.2)

$$\mu(T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_k}(E)) = r_{\alpha_1}^{d_0} \dots r_{\alpha_k}^{d_0}.$$

Из последнего равенства и (19) получаем утверждение леммы.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.7 сформулируем определение.

**Определение 1.5.** Внешняя мера  $\text{mes}$  является борелевски регулярной, если все открытые множества  $\text{mes}$ -измеримы и для любого  $A \subseteq X$  существует борелевское множество  $B$  такое, что  $A \subseteq B$  и  $\text{mes}(A) = \text{mes}(B)$  (см. [1]).

**Замечание 1.3.** Если  $\text{mes}$  — регулярная внешняя мера и  $\text{mes}(A) < \infty$ , где  $A \subseteq X$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует замкнутое подмножество  $F$  множества  $A$ , что  $\text{mes}(A \setminus F) < \varepsilon$ . Если к тому же  $\text{mes}(A) > 0$ , то существует замкнутое  $F \subseteq A$ , что  $\text{mes}(F) > 0$ .

Хаусдорфова мера  $\mu$  является борелевски регулярной, поскольку в силу теоремы 1.1 и 1.4 все борелевские множества  $\mu$ -измеримы. Далее, рассмотрим последовательность открытых покрытий, реализующих меру Хаусдорфа некоторого множества  $A$ . Для каждого покрытия рассмотрим объединение всех его членов. Пересечение этих объединений — искомое борелевское множество  $B$ , для которого  $\mu(B) = \mu(A)$  (см. [38, стр. 58]).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7.** Рассмотрим инвариантное множество  $A \in \mathcal{B}_E^*$ , такое что  $\mu(A) > 0$ . В силу борелевской регулярности меры  $\mu$  существует замкнутое подмножество  $F$  множества  $A$ , такое что  $\mu(F) > 0$  (см. замечание 1.3). Заметим, что для всех  $k \geq 1$  выполняется равенство  $E = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N} T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$ . Для каждого  $k \geq 1$  среди всех множеств  $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$ ,  $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N$ , выделим те, для которых  $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset$ , объединение таких множеств обозначим через  $F_k$ , т. е.  $F_k = \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq N} \{T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) :$

$T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset$ . Обратим внимание на то, что  $F_k \supseteq F_{k+1} \supseteq F$  для всех  $k \geq 1$ . Кроме того, выполняется равенство  $\bigcap_{k \geq 1} F_k = F$ . Действительно, пусть  $x \in \bigcap_{k \geq 1} F_k$ , но тогда для каждого  $k \geq 1$  существует множество  $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$ , такое что  $x \in T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)$  и при этом  $T_{i_1} \dots T_{i_k}(E) \cap F \neq \emptyset$ . Пусть  $\text{diam}(E) = C$  и  $r = \max\{r_1, \dots, r_N\}$ , тогда

$$\text{diam}(T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)) \leq Cr^k. \quad (20)$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ , используя (20), найдем такое  $k \geq 1$ , что

$$\text{diam}(T_{i_1} \dots T_{i_k}(E)) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы получаем, что в любой окрестности точки  $x$  найдется точка, принадлежащая множеству  $F$ , следовательно, в силу замкнутости  $F$  и точка  $x \in F$ . Стало быть, действительно, множество  $F$  и  $\bigcap_{k \geq 1} F_k$  совпадают.

Используя лемму 1.4, а также свойство аддитивности меры, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Pi^{-n}(A) \cap F_k) = \mu(A)\mu(F_k) \quad (21)$$

для любого  $A \in \mathcal{B}_E^*$ . Кроме того, в силу непрерывности меры  $\mu$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (22)$$

Из равенств (21) и (22) следует, что найдется последовательность  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ , такая что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\Pi^{-n_k}(A) \cap F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (23)$$

Но из условия леммы следует, что  $\Pi^{-n_k}(A) = A$ , поэтому из (23) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap F_k) = \mu(A)\mu(F). \quad (24)$$

С другой стороны, в силу непрерывности меры  $\mu$  выводим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A \cap F_k) = \mu(A \cap F). \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем равенство

$$\mu(A)\mu(F) = \mu(A \cap F).$$

Но  $F$  является подмножеством  $A$  причем  $\mu(F) > 0$ , поэтому  $\mu(A) = 1$ . Этим и завершается доказательство теоремы.

В основе доказательства следствия 1.2 лежит следующая лемма (см. [39, стр. 39]).

**Лемма 1.5.** *Если пространство с мерой  $E$  является топологическим пространством со счетной базой, причем каждое его непустое открытое подмножество имеет положительную меру, и если  $T$  — эргодическое сохраняющее меру преобразование простран-*

ства  $E$ , то для почти всех  $\omega \in E$  траектория точки  $\omega$  (т. е. последовательность  $\{T^n(\omega)\}$ ) всюду плотна.

Заметим, что пространство  $E$  с метрикой, индуцированной внешним пространством  $(X, \rho)$ , является компактным, а значит и сепарабельным, отсюда следует, что  $(E, \rho)$  является топологическим пространством со счетной базой.

**Лемма 1.6.** Пусть  $U$  — непустое открытое подмножество пространства  $(E, \rho)$ , тогда  $\mu(U) > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $x_0$  — произвольная точка пространства  $E$  и  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, докажем, что  $\mu(B_{x_0}^\varepsilon) > 0$ , где  $B_{x_0}^\varepsilon = \{x \in E : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$ . Далее, напомним, что  $E = \bigcup_{i=1}^N T_i$ , где  $T_1, \dots, T_N$  — сжимающие преобразования подобия с коэффициентами  $r_1, \dots, r_N$  соответственно. Через  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots$  обозначим некоторую точку из  $\Phi^{-1}(x_0)$ . Пусть  $\text{diam}(E) = C$  и  $r = \max\{r_1, \dots, r_N\}$ , тогда

$$\text{diam}(T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E)) \leq Cr^k.$$

Выберем  $k$  таким образом, чтобы выполнялось следующее неравенство  $Cr^k < \varepsilon/2$ . Тогда  $x_0 \in T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E) \subseteq B_{x_0}^\varepsilon$ . Следовательно,

$$\mu(B_{x_0}^\varepsilon) \geq \mu(T_{\sigma_1} \dots T_{\sigma_k}(E)) = \prod_{i=1}^k r_{\sigma_i}^{d_0} > 0,$$

где  $d_0 = \dim(E)$ . Стало быть, любое непустое открытое подмноже-

ство  $E$  имеет положительную меру. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Из лемм 1.5 и 1.6 сразу следует утверждение следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.3. Докажем, что  $\xi_n, n \geq 0$  — измеримая функция, для этого достаточно доказать измеримость функции  $\eta$  (поскольку измеримость отображения  $\Pi$  сразу вытекает из предложения 1.2). Пусть  $j$  — произвольное число из множества  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Из определения  $\eta$  следует, что  $T_j(E) \setminus B_0 \subseteq \{\omega : \eta(\omega) = j\} \subseteq T_j(E)$ , откуда получаем, что  $\{\omega : \eta(\omega) = j\} \in \mathcal{B}^*(E)$ . Этим и завершается доказательство измеримости  $\xi_n$ .

Поскольку  $E \in \mathcal{S}$ , поэтому  $E = \bigcup_{i=1}^N T_i(E)$ , где  $T_1, \dots, T_N$  сжимающие преобразования подобия с коэффициентом  $r$  и, кроме того,  $\mu^{\dim(E)}(E) = 1$ . Следовательно, используя теорему 1.2, мы получаем, что  $\dim(E) = -\ln N / \ln r$ . Стало быть,  $\mu(T(A)) = \frac{1}{N}\mu(A)$  для любого  $A \subseteq X$ , воспользовавшись этим фактом, найдем вероятность  $\mu(\omega : \xi_{n_1}(\omega) = k_1, \dots, \xi_{n_m}(\omega) = k_m)$  (напомним, что мы опускаем верхний индекс  $\dim(E)$  в обозначении меры  $\mu^{\dim(E)}$ ). Пусть для определенности  $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ .

$$\begin{aligned}
& \mu(\omega : \xi_{n_1}(\omega) = k_1, \dots, \xi_{n_m}(\omega) = k_m) \\
&= \mu \left( \bigcup_{i_1=1, \dots, i_{n_1-1}=1, \dots, i_{n_m-1}=1}^N (T_{i_1} \dots T_{i_{n_1-1}} T_{k_1} \dots T_{i_{n_m-1}} T_{k_m}(E)) \right) \quad (26) \\
&= 1/N^m \sum_{i_1=1, \dots, i_{n_1-1}=1, \dots, i_{n_m-1}=1}^N 1/N^{n_m-m} = 1/N^m.
\end{aligned}$$

В частности получаем, что  $\mu(\omega : \xi_{n_j}(\omega) = k_j) = 1/N$ , откуда и из (26) следует независимость  $(\xi_n)_{n \geq 0}$ , а также равномерность распределения случайной величины  $\xi_0$  на множестве  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

Напомним, что  $\Phi^{-1}(E \setminus B_0) = \Sigma_{E \setminus B_0}$ . Покажем, что

$$S(\Sigma_{E \setminus B_0}) \subseteq \Sigma_{E \setminus B_0}. \quad (27)$$

Предположим, что существует последовательность  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in \Sigma_{E \setminus B_0}$ , такая что  $\tau := S(\sigma) \notin \Sigma_{E \setminus B_0}$ . Тогда существует последовательность  $\tau' = (\tau'_1, \tau'_2, \dots) \in \Phi^{-1}(\Phi(\tau))$  и  $\tau \neq \tau'$ . Рассмотрим последовательность  $\sigma' = (\sigma_1, \tau'_1, \tau'_2, \dots)$ . Из теоремы 1.6 следует, что  $\Phi(\sigma') = T_{\sigma_1} \circ \Phi(\tau') = T_{\sigma_1} \circ \Phi(\tau) = \Phi(\sigma)$ , получаем противоречие, т. к.  $\sigma \neq \sigma'$  и  $\sigma \in \Sigma_{E \setminus B_0}$ . Стало быть, имеет место (27). Следовательно, для всех  $\omega \in E \setminus B_0$  выполняется равенство:  $\Pi^n(\omega) = \Phi \circ S^n \circ \Phi^{-1}(\omega)$ , осталось заметить, что  $S^n \circ \Phi^{-1}(\omega) = (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots)$ . Предложение доказано.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1.** Покажем, что  $\Phi$ , определенное в

условии леммы, удовлетворяет теореме 1.6. Пусть для начала  $\sigma_1 = 1$ .  
Нужно доказать, что

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots))$$

или, что то же самое

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \alpha \Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots). \quad (28)$$

Поскольку имеет место равенство  $\Phi(\sigma_2, \sigma_3, \dots) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\sigma_{j+2} - 1)$ , мы сразу получаем (28). Аналогично рассматривается случай  $\sigma_1 = 2$ . Лемма доказана.

## 1.6 Результаты главы 1

В первой главе получено свойство эргодичности преобразования самоподобного континуума, полусопряженного преобразованию сдвига на символьном пространстве. С помощью преобразования сдвига на символьном пространстве определены стационарные процессы с траекториями всюду плотными на самоподобных континуумах с нормированной мерой Хаусдорфа. В следующих главах именно с помощью стационарных процессов будут формироваться энергетические характеристики аномальных процессов переноса.



## ГЛАВА 2

### Геометрическая модель аномальных процессов переноса

#### 2.1 Введение

В основе работ, посвященных аномальным процессам переноса на самоподобных структурах (см., например, [13], [14], [34], [35], [36]), лежит случайное блуждание на множествах, представляющих эти структуры. Во всех работах, посвященных аномальной диффузии, обсуждается нелинейный рост по времени среднего квадрата перемещения частицы. Сформулируем условия, которые в целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса (см., например, [14], [30]) предполагаются выполненными для частицы, блуждающей по самоподобному множеству. Частица блуждает по некоторым структурным элементам самоподобного множества, при этом траектория, по которой движется частица, параметризуется числовой прямой и имеет размерность  $d_0$ . Для частицы, начинающей блуждание из начала координат, средний квадрат расстояния до начала координат в момент времени  $n$  ведет себя пропорционально  $n^{1/d_0}$  при  $n \rightarrow \infty$ . В соответствии с представленными условиями, во второй главе строится геометрический формат степенного изменения дисперсии случайного блуждания, порожденного аномальным процессом переноса. Суть этой модели в следующем. При параметризации множеств числовой прямой мы рассматриваем последовательность сумм неза-

висимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с соответствующим числом моментов, представляющую случайное блуждание на этой прямой. Отметим, что параметризация самоподобных континуумов, а также топологическое вложение этих континуумов в евклидово пространство будет существенно использоваться и в следующей главе.

Основным результатом данной главы является теорема 2.1. Доказательство результатов главы вынесено в раздел 2.4.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [69], [63], [64].

## 2.2 Самоподобные множества, параметризуемые числовой прямой

Пусть  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство. Пусть  $d \geq 0$ , через  $\mu^d(A)$ , как и в предыдущей главе, обозначим  $d$ -мерную меру Хаусдорфа множества  $A$ . Хаусдорфову размерность множества  $A$  мы будем обозначать через  $\dim(A)$ . Борелевскую  $\sigma$ -алгебру множеств в  $X$  будем обозначать через  $\mathcal{B}$ .

Пусть  $T_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом  $r$ , где  $m$  — некоторое фиксированное целое значение, превосходящее 0. Через  $\mathcal{K}$  обозначим множество всех непустых компактных подмножеств пространства  $X$ . Для набора отображений  $\{T_0, \dots, T_m\}$  зададим оператор Хатчинсона  $H : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , сопостав-

ляющий каждому непустому компактному множеству  $A$  непустое компактное множество

$$H(A) = \bigcup_{i=0}^m T_i(A).$$

Неподвижную точку оператора Хатчинсона  $H$  обозначим через  $A_0$  (доказательство существования и единственности неподвижной точки оператора Хатчинсона в  $\mathcal{K}$  можно найти, например, в [46, теорема 9.1], [50, п. 3.1]).

Итак, мы имеем непустое компактное множество  $A_0$ , обладающее свойством

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^m T_i(A_0). \quad (29)$$

Обозначим через  $x_0$  и  $x_m$  — неподвижные точки преобразований  $T_0$  и  $T_m$  соответственно, будем рассматривать случай, когда  $x_0 \neq x_m$ . В дальнейшем будем считать, что (см. [50])

$$T_i(x_0) = T_{i-1}(x_m) \quad (30)$$

для всех  $i = 1, \dots, m$ . Будем также считать, что

$$T_i(A_0) \cap T_j(A_0) = \begin{cases} \{T_{i'}(x_0)\} & \text{при } |i - j| = 1, \\ \emptyset & \text{при } 0 < |i - j| \neq 1, \end{cases} \quad (31)$$

где  $i' = \max(i, j)$ .

Через  $T^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  будем обозначать  $n$ -кратную композицию

преобразований  $T \circ \dots \circ T$ , под  $T^0$  будем понимать тождественное отображение  $X$  на  $X$ .

Определим последовательность множеств  $A_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , положив  $A_j = T_0^{-j}(A_0)$ . Кроме того, определим преобразования  $T_i^{(j)} := T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Заметим, что отображение  $T_0^{(j)}$  совпадает с  $T_0$  для всех  $j = 0, 1, 2, \dots$

Непосредственно из определения  $A_j$  и  $T_i^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  следует, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} T_0^{(j)}(A_j) &= A_{j-1} \\ T_0^{(j)} \circ T_{i_1}^{(j)} \circ \dots \circ T_{i_k}^{(j)}(A_j) &= T_{i_1}^{(j-1)} \circ \dots \circ T_{i_k}^{(j-1)}(A_{j-1}), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $j \geq 1$ ,  $k \geq 1$  и  $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}$ . Соотношения (32) назовем условиями согласования. Из определения множеств  $A_j$ , преобразований  $T_i^{(j)}$  и равенства (29) следует

$$A_j = \bigcup_{i=0}^m T_i^{(j)}(A_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Заметим, что множества  $A_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , удовлетворяющие (33), называются *самоподобными* (см., например, [44]).

Введем в рассмотрение множество  $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ . Из (32) и (33) следует, что  $A_{i-1} \subseteq A_i$  при всех  $i = 1, 2, \dots$

**Замечание 2.1.** Размерность Хаусдорфа множества  $E$  совпадает с размерностью множества  $A_0$ , это следует из того, что  $\dim(E) = \sup_{i=0,1,\dots} \dim(A_i)$  (см., например, [44]) и того, что  $\dim(A_0) =$

$\dim(A_j)$  для всех  $j \geq 1$ . Совпадение размерностей Хаусдорфа множеств  $A_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$  выводится из первого равенства в условии 32, теоремы 1.2 и определения размерности Хаусдорфа. Более того, предполагая, что  $0 < \mu^{\dim(A_0)}(A_0) < \infty$ , из следствия 1.1 и теоремы 1.2 сразу следует, что  $\dim(A_j) = -\ln(m+1)/\ln r$ ,  $j = 0, 1, \dots$

Отметим также следующий факт. Пусть  $S : X \rightarrow X$  — некоторое изометрическое преобразование, тогда  $\dim(S(E)) = \dim(E)$  — это непосредственно следует из определения размерности Хаусдорфа и теоремы 1.2. Кроме того,  $\dim(E \cup S(E)) = \dim(E)$ , т. к. для любых борелевских  $A$  и  $B$  выполняется равенство  $\dim(A \cup B) = \max\{\dim(B), \dim(A)\}$  (см., например, [44], теорема 6.1.7).

**Замечание 2.2.** Рассмотрим классическую кривую Коха в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , обозначим ее буквой  $C_0$ . Эта кривая является одним из примеров связного самоподобного множества. Множество  $C_0$  определяется четырьмя преобразованиями подобия (см., например, [50, стр. 13]):  $T_0(x) = \frac{1}{3}A_0x + b_0$ ,  $T_1(x) = \frac{1}{3}A_1x + b_1$ ,  $T_2(x) = \frac{1}{3}A_2x + b_2$ ,  $T_3(x) = \frac{1}{3}A_3x + b_3$ , для которых  $C_0 = \bigcup_{i=0}^3 T_i(C_0)$ , где  $A_0 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$  — ортогональные матрицы и  $b_0 = (0, 0)^t$ ,  $b_1 = (1/3, 0)^t$ ,  $b_2 = (1/2, \sqrt{3}/6)^t$ ,  $b_3 = (2/3, 0)^t$ , где верхний индекс  $t$  означает операцию транспонирования. Для  $C_0$  и преобразований  $T_0, T_1, T_2$  и  $T_3$  выполняется условие (31). Приведем в явном виде координаты точек пересе-

чения:  $T_0(C_0) \cap T_1(C_0) = \{(1/3, 0)\}$ ,  $T_1(C_0) \cap T_2(C_0) = \{(1/2, \sqrt{3}/6)\}$ ,  $T_2(C_0) \cap T_3(C_0) = \{(2/3, 0)\}$ . Учитывая, что неподвижными точками преобразований  $T_1$  и  $T_3$  являются точки  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$  соответственно, легко проверяется выполнение условия (30).

Размерность Хаусдорфа кривой Коха равна  $d = \ln 4 / \ln 3$  (см., например, [36], [44], [46]).

Преобразования  $T_i^{(j)}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$  определим следующим образом:  $T_i^{(j)}(x) = \frac{1}{3}A_i x + 3^j b_i$ . Последовательность множеств  $C_j$ ,  $j \geq 0$  естественно определяется через начальное множество  $C_0$ :

$$C_j = \{3^j \cdot (x, y) : (x, y) \in C_0\}.$$

Непосредственно проверяется, что для преобразований  $T_i^{(j)}$ ,  $i = 0, \dots, 3$  и множеств  $C_j$ ,  $j \geq 0$  выполняется условие согласования (32).

Для каждого множества  $A_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  определим символьное метрическое пространство  $\Sigma$  с метрикой  $d$  на  $m + 1$  элементах  $\{0, 1, \dots, m\}$  как множество всех бесконечных последовательностей  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)$ ,  $\sigma_k \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (см. выше раздел 1.3). В виде следующего предложения 2.1 для пространства  $(A_j, \rho)$  переформулируем теорему 1.6.

**Предложение 2.1.** *Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  существует единственная непрерывная функция  $\Phi_j : (\Sigma, d) \rightarrow (A_j, \rho)$ , такая что*

для любого  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots) \in \Sigma$  выполняется

$$\Phi_j(\sigma) = T_{\sigma_1}^{(j)}(\Phi_j((\sigma_2, \sigma_3, \dots))).$$

Кроме того,  $\Phi_j(\Sigma) = A_j$ .

Определим соответствие  $\Psi : [0, +\infty) \rightarrow E$  следующим образом. Любое  $x \in [0, +\infty)$  можно представить в виде суммы  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m + 1)^{i-j}$ , положим

$$\Psi(x) = \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots)).$$

Заметим, что значение  $x$  можно представить в виде указанной суммы неоднозначным образом.

Подчеркнем, что всюду в дальнейшем числовую прямую  $\mathbb{R}$ , а также ее подмножества мы будем снабжать топологией, порожденной метрикой  $\lambda(x, y) = |x - y|$ .

В дальнейшем будем предполагать, что существует изометрическое преобразование  $S : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ , такое что  $S(E) \cap E$  — одноэлементное множество при этом  $S(x_0) = x_0$ .

Обозначим  $S(A_j)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  через  $B_j$ . Каждое из множеств  $B_j$  является самоподобным, поскольку выполняется равенство  $B_j = \bigcup_{i=0}^m ST_i^{(j)} S^{-1}(B_j)$ . Через  $S_i^{(j)}$  обозначим следующую композицию преобразований:  $ST_i^{(j)} S^{-1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Отображения  $S_i^{(j)}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots$  являются сжимающими преобразованиями подобия с коэффициентом  $r$ , поскольку  $S$  — изо-

метрическое.

Для преобразований  $S_i^{(j)}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  и множеств  $B_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  выполняется равенство (33), а также условия (30) — (32). С помощью преобразования  $S$  доопределим  $\Psi$  на  $(-\infty, 0]$ :

$$\Psi(x) = S(\Psi(-x)).$$

Введем обозначение:  $E' = E \cup S(E)$ .

**Предложение 2.2.** *Для каждого  $x \in \mathbb{R}$  значение  $\Psi(x)$  определяется однозначно, т. е. соответствие  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow E'$  является функциональным.*

Более того, имеет место следующее предложение.

**Предложение 2.3.** *Отображение  $\Psi$  является гомеоморфизмом пространства  $(\mathbb{R}, \lambda)$  на пространство  $(E', \rho)$ .*

Определим метрику на  $E'$  следующим образом:

$$f(x, y) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|, \quad x, y \in E'.$$

Метрику  $f$  будем в дальнейшем называть *внутренней метрикой* на  $E'$ .

Из предложения 2.3 следует, что рассматриваемое пространство  $(E', \rho)$  является связным. Далее, мы рассмотрим случай *несвязных самоподобных множеств*.

Пусть  $T_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  — сжимающие преобразования подобия с



коэффициентом  $r$ , где  $m$  — фиксированное целое число, превосходящее 1. Рассмотрим непустое компактное множество  $A_0$ , удовлетворяющее (29). Будем считать, что для множества  $A_0$  пересечение  $T_k(A_0) \cap T_l(A_0) = \emptyset$  при всех  $k \neq l$ . Введем в рассмотрение последовательность непустых компактных множеств  $\{A_j := T_0^{-j}(A_0), j = 0, 1, \dots\}$ , а также преобразования  $T_i^{(j)} := T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j, i = 0, \dots, m, j = 0, 1, 2, \dots$ . Для множеств  $A_j$  и преобразований  $T_i^{(j)}$  выполняется равенство (33) и условия согласования (32). Из (32) следует, что и для любого  $j \geq 0$  имеет место соотношение

$$T_k^{(j)}(A_j) \cap T_l^{(j)}(A_j) = \emptyset \quad (34)$$

при всех  $k \neq l$ .

Обратим внимание, что по-прежнему выполняется предложение 2.1, при этом отображение  $\Phi_j : (\Sigma, d) \rightarrow (A_j, \rho), j = 0, 1, \dots$ , определяемое в этом теореме, является гомеоморфизмом (см. теорему 4.2.3 в [44]).

Также как и раньше через  $E$  обозначим объединение  $\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ . Пространство  $(E, \rho)$  является несвязным относительно топологии, порожденной метрикой  $\rho$ .

Всюду в дальнейшем *связность или несвязность пространства* будет подразумеваться относительно топологии, порожденной метрикой  $\rho$ .

Определим соответствие  $\Psi : [0, +\infty) \rightarrow E$ . Всякое  $x \in [0, +\infty)$

имеет представление в виде суммы  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$ , полагаем

$$\Psi(x) = \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, \dots)).$$

Будем также как и в связном случае предполагать, что существует изометрическое преобразование  $S : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ , такое что  $S(E) \cap E$  — одноточечное множество при этом  $S(x_0) = x_0$ . По-прежнему,  $E \cup S(E)$  мы обозначаем через  $E'$ . С помощью преобразования  $S$  доопределим  $\Psi$  на  $(-\infty, 0]$ :

$$\Psi(x) = S(\Psi(-x)).$$

Будем говорить, что действительное число имеет *двойственное*  $(m+1)$ -ичное представление, если его можно представить в виде  $(m+1)$ -ичной дроби с периодом 0 и  $m$ .

**Предложение 2.4.** *Для всякого  $x \in \mathbb{R}$ , не имеющего двойственного  $(m+1)$ -ичного представления, значение  $\Psi(x)$  определяется однозначно. Для всякого же  $x \in \mathbb{R}$ , имеющего двойственное  $(m+1)$ -ичное представление,  $\Psi(x)$  состоит из двух различных точек.*

Аналогично связному случаю определим  $f : E' \times E' \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x, y) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(y)|,$$

заметим, что  $f$  является псевдометрикой, поскольку мы убедились, что существуют точки  $x, y \in E'$ , что  $x \neq y$ , но  $\Psi^{-1}(x) = \Psi^{-1}(y)$ . Псевдометрику  $f$  также как и в связном случае будем называть

внутренней метрикой на  $E'$ .

Исключим из рассмотрения рациональные дроби с периодом  $m$ , в этом случае соответствие  $\Psi$  станет однозначным, обозначим ее через  $\Psi^{(1)}$ . Исключив из рассмотрения рациональные дроби с периодом ноль, кроме 0, получим также функциональное соответствие, обозначим его через  $\Psi^{(2)}$ .

**Предложение 2.5.** *Функции  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$ , действующие из  $(\mathbb{R}, \lambda)$  в  $(E', \rho)$ , являются непрерывными во всех точках действительной прямой, за исключением точек, имеющих двойственное  $(m + 1)$ -ичное представление. В точках с двойственным  $(m + 1)$ -ичным представлением  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$  являются непрерывными справа и слева соответственно на интервале  $[0, +\infty)$ , а также непрерывными слева и справа соответственно на интервале  $(-\infty, 0]$ .*

Точки  $x, y \in E'$  будем считать неразличимыми, если  $f(x, y) = 0$ . Образ  $\Psi(z) = \{\Psi^{(1)}(z), \Psi^{(2)}(z)\}$ ,  $z \in \mathbb{R}$  состоит вообще говоря из двух различных относительно метрики  $\rho$  точек, но относительно псевдометрики  $f$  эти точки неразличимы.

В дальнейшем говоря об *отображении*  $\Psi$ , мы будем подразумевать, что  $\Psi(z)$  равно одному из значений  $\Psi^{(1)}(z)$  или  $\Psi^{(2)}(z)$ .

**Предложение 2.6.** *Отображения  $\Psi^{-1} : (E', \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \lambda)$  и  $\Psi : (\mathbb{R}, \lambda) \rightarrow (E', f)$  являются непрерывными.*

Из предложения 2.6, в частности, следует, что топологическое пространство  $(E', f)$  является связным, поскольку образ связного

пространства при непрерывном отображении является связным.

**Предложение 2.7.** Пусть  $\mu^d(A_0) = 1$ , где  $d = \dim(A_0)$ . Тогда для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  выполняется равенство  $\mu^d(\Psi([x, y])) = |x - y|$ .

### 2.3 Случайное блуждание на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой

Рассмотрим случайное блуждание  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  на действительной прямой. Значение  $S_n$  для каждого  $n$  определяется суммой:  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $S_0 = 0$ , где  $\xi_i$  — независимые одинаково распределенные действительнoзначные случайные величины.

Последовательность сумм  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  индуцирует случайное блуждание на  $E'$ , а именно: последовательность  $\Psi(S_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  назовем случайным блужданием на  $E'$  (см. замечание 2.3).

Заметим, что в случае несвязанного пространства  $(E', \rho)$  образ  $\Psi(S_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  может состоять из двух различных точек (относительно метрики  $\rho$ ), но как отмечалось выше точки  $\Psi^{(1)}(S_n)$  и  $\Psi^{(2)}(S_n)$  неразличимы относительно внутренней метрики  $f$ . В качестве  $\Psi(S_n)$  мы выбираем одно из значений  $\Psi^{(1)}(S_n)$  или  $\Psi^{(2)}(S_n)$  (безразлично какое). Если же  $E'$  связное, то  $\Psi^{(1)}$  совпадает с  $\Psi^{(2)}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом  $\langle |\xi_1|^{\max(2, 2/d)} \rangle < \infty$ , где  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ . Тогда, если  $d \leq 2$ , то выполняются следующие

неравенства

$$d_1 n^{1/d} \leq \langle \rho^2(\Psi(S_n), x_0) \rangle \leq d_2 n^{1/d}, \quad (35)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$ .

Если к тому же распределение  $\xi_1$  имеет ноль своей медианой, т. е.

$$\mathbf{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1/2, \text{ то (35) выполняется и при } d > 2.$$

Заметим, что, если  $0 < \mu^{\dim(A_0)}(A_0) < \infty$ , то  $\dim(E') = -\ln(m+1)/\ln r$  (см. замечание 2.1).

Обратим внимание, что расстояние между  $\Psi(S_n)$  и  $x_0$  во внутренней метрике  $f$  пространства  $E'$  равно:

$$f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|, \quad n = 0, 1, \dots,$$

поэтому  $\langle f^2(\Psi(S_n), x_0) \rangle = n$ . В метрике  $\rho$  исходного пространства  $X$  средний квадрат расстояния от  $\Psi(S_n)$  до  $x_0$  «ведет себя» как  $n^{1/d}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Отметим также, что если  $\mu^d(A_0) = 1$ , где  $d = \dim(E')$ , то из предложения 2.7 следует, что  $\mu^d(\Psi([0, S_n])) = f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|$ .

**Предложение 2.8.** Пусть  $\dim(E') > 0$  и  $\gamma : ([0, 1], \lambda) \rightarrow (E', f)$  — произвольное непрерывное отображение, образ которого состоит по крайней мере из двух различных точек. Тогда выполняется равенство  $\dim(E') = \dim(\gamma([0, 1]))$ .

**Замечание 2.3.** Сравним полученные нами результаты с тем, что анонсировалось во введении. Предполагая, что  $0 < \dim(E') < +\infty$ , из предложения 2.8 следует, что число степеней свободы множества  $E'$  равно  $k = 1$  (число степеней свободы понимается в смысле, определенном во введении). Рассмотрим случайное блуждание  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $S_0 = 0$ , где  $\xi_i$  — независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины, т. е.  $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$ . Блуждание  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  индуцирует случайное блуждание  $\Psi(S_n)$  на  $E'$ . Аналогом целочисленной решетки на  $E'$  является множество  $\{\Psi(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ . Вероятность попасть из точки  $\Psi(n)$  в точки  $\Psi(n \pm 1)$  равна  $1/2$ , при этом «длины» скачков равны  $\mu^d(\Psi([n, n \pm 1])) = 1$ , где  $d = \dim(E')$  (здесь, конечно, предполагается, что  $\mu^d(A_0) = 1$ ). «Структурными элементами», по которым происходит блуждание, о которых упоминалось во введении, являются множества  $\Psi([n, n \pm 1])$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Итак,  $\Psi(S_n)$  представляет собой аналог симметричного блуждания по целочисленной решетке. Вероятность возвращения в начальную точку  $x_0$  ведет себя пропорционально  $n^{-1/2}$  при  $n \rightarrow \infty$ , это сразу следует из того факта, что  $\mathbf{P}(\Psi(S_n) = x_0) = \mathbf{P}(S_n = 0)$ , между тем в метрике  $\rho$  исходного пространства  $X$  средний квадрат расстояния от  $\Psi(S_n)$  до  $x_0$  «ведет себя» как  $n^{1/d}$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. теорему 2.1).

## 2.4 Доказательство утверждений

**Лемма 2.1.** *Для любой последовательности  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma$  выполняется равенство  $\Phi_j((0, \sigma_1, \sigma_2, \dots)) = \Phi_{j-1}(\sigma)$ , где  $j \geq 1$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную последовательность

$(i_1, i_2, \dots) \in \Sigma$ . Из теоремы 2.1 и полноты пространства  $(X, \rho)$  следует, что

$$\Phi_j(i_1, i_2, \dots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j),$$

но тогда из условий согласования (32) сразу следует утверждение леммы.

Прежде всего приведем доказательства утверждений для связного случая.

**Лемма 2.2.** *Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  выполняется равенство  $T_i^{(j)}(x_0) = T_{i-1}^{(j)}(x_m^{(j)})$  при всех  $i = 1, \dots, m$ , где  $x_m^{(j)}$  — неподвижная точка преобразования  $T_m^{(j)}$ . Кроме того, если  $|k - l| = 1$ , то пересечение  $T_k^{(j)}(A_j) \cap T_l^{(j)}(A_j)$  является одноточечным множеством, если же  $0 < |k - l| \neq 1$  — пустым множеством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы сразу следует из условий согласования (32), а также условий (30) и (31).

Заметим, что  $\Phi_j^{-1}(x_0)$  и  $\Phi_j^{-1}(x_m^{(j)})$ ,  $j \geq 0$  — прообразы точек  $x_0$  и  $x_m^{(j)}$  состоят по крайней мере из одного элемента, а именно:

$(0, 0, \dots, 0, \dots)$  и  $(m, m, \dots, m, \dots)$  соответственно, в следующей лемме мы покажем, что эти прообразы состоят ровно из одного элемента.

**Лемма 2.3.** *Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  выполняются равенства*

$$\begin{aligned}\Phi_j^{-1}(x_0) &= \{(0, 0, \dots, 0, \dots)\} \\ \Phi_j^{-1}(x_m^{(j)}) &= \{(m, m, \dots, m, \dots)\}.\end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если предположить, что прообраз  $\Phi_j^{-1}(x_0)$  состоит из хотя бы двух различных точек, то из леммы 2.2 следует, что  $x_0 \in T_0^{(j)}(A_j) \cap T_1^{(j)}(A_j)$ . Тогда имеет место равенство

$$x_0 = T_0^{(j)}(x_m^{(j)}) = T_1^{(j)}(x_0), \quad (36)$$

поэтому  $x_0 = x_m^{(j)}$ , заметим, что если  $m \geq 2$ , то последнее равенство противоречит лемме 2.2. Пусть теперь  $m = 1$ . Рассмотрим произвольную точку  $x \in A_j$ , существует последовательность  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ , что  $\Phi_j(\sigma) = x$ . Кроме того, рассмотрим последовательность  $\tau_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_n, 0, 0, \dots)$ ,  $n \geq 1$  (первые  $n$  символов последовательностей  $\sigma$  и  $\tau_n$  совпадают). Из непрерывности  $\Phi_j : (\Sigma, d) \rightarrow (A_j, \rho)$  выводим, что величину  $\rho(\Phi_j(\sigma), \Phi_j(\tau_n))$  можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших  $n$ . Из (36) следует, что  $\Phi_j(\tau_n) = x_0$ , т. е. любая точка из  $A_j$  сколь угодно близка к  $x_0$ , поэтому множество  $A_j$  состоит из одной точки  $x_0$ , но это противоречит тому, что  $A_j$  состоит из по крайней мере двух различных точек. Итак, первое равенство леммы доказано.



Докажем второе равенство в условии леммы. Предположим, что прообраз  $\Phi_j^{-1}(x_m^{(j)})$  состоит по крайней мере из двух различных точек. Тогда в силу леммы 2.2 выполняется равенство

$$x_m^{(j)} = T_{m-1}^{(j)}(x_m^{(j)}) = T_m^{(j)}(x_0),$$

откуда следует, что  $x_0 = x_m^{(j)}$ . Если  $m \geq 2$ , то мы получим противоречие с леммой 2.2. В случае, когда  $m = 1$ , мы аналогично получим, что  $A_j$  состоит ровно из одной точки  $x_0$ , что противоречит тому, что  $A_j$  состоит из хотя бы двух точек. Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что композиция преобразований  $T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \dots \circ T_{i_l} \circ T$  совпадает с преобразованием  $T$ , когда  $l = 0$ .

**Лемма 2.4.** Пусть  $x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_i^{(j)}(A_j)$ , где  $l \geq 0$ ,  $i \geq 1$ ,  $j \geq 0$ . Тогда

$$\Phi_j^{-1}(x) = \{(i_1, \dots, i_l, i-1, m, m, \dots), (i_1, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots)\}. \quad (37)$$

Пусть  $x \in A_j$ ,  $j \geq 0$  и не существует  $i \geq 1$  и  $l \geq 0$ , что

$$x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i-1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_i^{(j)}(A_j).$$

Тогда  $\Phi_j^{-1}(x)$  состоит из ровно одного элемента.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего докажем (37) при  $l = 0$ . Предположим, что существует последовательность  $\kappa = \{k_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ , такая что  $\Phi_j(\kappa) = x$  и  $\kappa$  не совпадает ни с одной из последовательностей

$(i-1, m, m, \dots, m, \dots)$  и  $(i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Заметим, что  $k_1 \notin \{i, i-1\}$ , в противном случае получим противоречие с леммой 2.3. В силу условия (31) выводим, что либо  $k_1 = i+1$ , либо  $k_1 = i-2$ . Пусть выполняется первый случай, тогда  $x \in T_i^{(j)}(A_j) \cap T_{i+1}^{(j)}(A_j)$ , стало быть  $x = T_i^{(j)}(x_m^{(j)})$ , с другой стороны,  $x = T_i^{(j)}(x_0)$ , получаем противоречие с леммой 2.3. Аналогично получаем противоречие и в случае  $k_1 = i-2$ .

Докажем теперь (37) при  $l \geq 1$ . Предположим, что существует последовательность  $\kappa = \{k_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ , такая что  $\Phi_j(\kappa) = x$  и  $\kappa$  не совпадает ни с одной из последовательностей  $(i_1, i_2, \dots, i_l, i-1, m, m, \dots, m, \dots)$  и  $(i_1, i_2, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ .

Пусть  $k_1 \neq i_1$ . Но тогда с необходимостью возникают два случая: либо  $k_1 = i_1 - 1$ , либо  $k_1 = i_1 + 1$ . Пусть имеет место первый случай, тогда  $x \in T_{i_1}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1-1}^{(j)}(A_j)$ , откуда получаем, что  $T_{i_1}^{(j)}(x_0) = x$ , поэтому  $x_0 = \Phi_j(i_2, \dots, i_l, i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ . Получили противоречие с леммой 2.3. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть существует  $s$ , такое что  $2 \leq s < l$  и  $k_s \neq i_s$ , но  $k_j = i_j$  при всех  $j < s$ . Тогда  $y = (T_{i_{s-1}}^{(j)})^{-1} \dots (T_{i_1}^{(j)})^{-1}(x) \in T_{i_s}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i_{l-1}}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_s}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i_l}^{(j)}(A_j)$ , с другой стороны  $\Phi_j(k_s, k_{s+1}, \dots) = y$ . Обсуждаемая ситуация свелась к предыдущей. Получаем противоречие.

Пусть теперь  $k_s = i_s$  для всех  $s = 1, \dots, l$ . Рассмотрим

$$y = (T_{i_l}^{(j)})^{-1} \dots (T_{i_1}^{(j)})^{-1}(x) \in T_{i_{l-1}}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_l}^{(j)}(A_j),$$

при этом  $\Phi_j(y) = (k_{l+1}, k_{l+2}, \dots)$ , где  $(k_{l+1}, k_{l+2}, \dots)$  не совпадает ни с одной из последовательностей  $(i-1, m, m, \dots, m, \dots)$  и  $(i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ , но эта ситуация также уже обсуждалась (см. выше), получаем противоречие.

Пусть  $x \in A_j$ ,  $j \geq 0$  и не существует  $i$  и  $l$ , что  $x \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i_{l-1}}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_l}^{(j)} T_{i_{l-1}}^{(j)}(A_j)$ . Утверждение леммы в этом случае сразу вытекает из леммы 2.2. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.2. Прежде всего пусть  $x$  произвольная точка из  $[0, +\infty)$ . Рассмотрим  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$ ,  $j \geq 0$ , не имеющего двойственного  $(m+1)$ -ичного представления. Тогда неоднозначность представления  $x$  в виде указанной суммы возникает в случае, когда  $\sigma_1 = 0$  при этом  $j \geq 1$ . Но если  $\sigma_1 = 0$ , то из леммы 2.1 следует, что  $\Phi_j((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) = \Phi_{j-1}((\sigma_2, \sigma_3, \dots))$ . Откуда, используя определение  $\Psi$ , получаем, что  $\Psi(x)$  определяется однозначно.

Рассмотрим теперь случай, когда  $x$  имеет двойственное  $(m+1)$ -ичное представление, т. е.  $x$  можно представить в виде  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$ ,  $j \geq 0$ , где  $\sigma_1 \dots \sigma_j \dots$ , такие что  $\sigma_n = 0$  при всех  $n$  начиная с некоторого номера  $l \geq 1$ , а  $\sigma_l \neq 0$ . Воспользовавшись теоремой 2.1, получим

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l, 0, 0, 0, \dots)) = T_{\sigma_1}^{(j)} T_{\sigma_2}^{(j)} \dots T_{\sigma_l}^{(j)}(x_0)$$

и

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l - 1, m, m, m, \dots)) = T_{\sigma_1}^{(j)} T_{\sigma_2}^{(j)} \dots T_{\sigma_l - 1}^{(j)}(x_m^{(j)}).$$

Далее, используя лемму 2.2, выводим

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l, 0, 0, 0, \dots)) = \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l - 1, m, m, m, \dots)).$$

Поэтому и в этом случае  $\Psi(x)$  определяется однозначно.

Далее, пусть теперь  $x$  произвольная точка из  $(-\infty, 0]$ , но тогда  $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$ . Мы уже доказали, что  $\Psi(-x)$  определяется однозначно, поэтому и  $\Psi(x)$  определено однозначно. Предложение доказано.

Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  определим расстояние  $d_j$  на  $\Sigma$  таким образом. Пусть  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots$  и  $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots$ , тогда положим

$$d_j(\sigma, \tau) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} (\sigma_i - \tau_i) / (m + 1)^{i-j} \right|. \quad (38)$$

**Лемма 2.5.** *Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  отображение  $\Phi_j : (\Sigma, d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  является непрерывным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим последовательность  $\nu_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Прежде всего рассмотрим тот случай, когда не существует  $k \geq 1$ , что  $\alpha_j = 0$  для всех  $j \geq k$  и не существует  $k \geq 1$ , что  $\alpha_j = m$  для всех  $j \geq k$ . Но мы не исключаем случай, когда  $\alpha_j = 0$  для всех  $j \geq 1$ , а также, когда  $\alpha_j = m$  для всех  $j \geq 1$ . В силу теоремы 2.1 для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , что при всех

$\beta \in \Sigma$ , удовлетворяющих неравенству  $d(\beta, \nu_0) < \delta$  выполняется  $|\Phi_j(\beta) - \Phi_j(\nu_0)| < \varepsilon$ . Существует целое число  $k \geq 1$ , такое что  $r^k \leq \delta$ . В силу определения расстояния  $d$ , для того чтобы выполнялось неравенство  $d(\beta, \nu_0) \leq r^k$ , необходимо и достаточно, чтобы хотя бы  $k$  первых компонент последовательностей  $\nu_0$  и  $\beta$  совпадали. Далее, заметим, что существует  $n \geq 1$ , что  $\alpha_{j+n+k} > 0$  и, кроме того, существует  $n_1 > n$ , что  $\alpha_{j+n_1+k} < m$ . Теперь рассмотрим множество всех последовательностей  $\gamma \in \Sigma$ , удовлетворяющих неравенству  $d_j(\gamma, \nu_0) < 1/(m+1)^{j+n_1+k}$ . Используя определение расстояния  $d_j$ , получаем, что по крайней мере  $j+n+k-1$  компонент последовательностей  $\gamma$  и  $\alpha_0$  совпадают, но т. к.  $j+n+k-1 \geq k$ , то  $|\Phi_j(\gamma) - \Phi_j(\nu_0)| < \varepsilon$ .

Пусть теперь последовательность  $\nu_0$  имеет вид  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , где  $\alpha_i = 0$  для всех  $i \geq l+1$  и  $\alpha_l > 0$  при некотором  $l \geq 1$ . Наряду с последовательностью  $\nu_0$  рассмотрим последовательность  $\nu_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l - 1, m, m, \dots)$ . Обратим внимание, что  $\Phi_j(\nu_0) = \Phi_j(\nu_1)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . В силу теоремы 2.1 для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , что при всех  $\beta, \gamma \in \Sigma$ , удовлетворяющих неравенствам  $d(\beta, \nu_0) < \delta$  и  $d(\gamma, \nu_1) < \delta$  выполняются соотношения  $|\Phi_j(\beta) - \Phi_j(\nu_0)| < \varepsilon$  и  $|\Phi_j(\gamma) - \Phi_j(\nu_1)| < \varepsilon$  соответственно. Найдется целое число  $k \geq 1$ , такое что  $r^k \leq \delta$ . В силу определения расстояния  $d$ , для того чтобы выполнялись неравенства  $d(\beta, \nu_0) \leq r^k$  и  $d(\gamma, \nu_1) \leq r^k$ , необходимо и достаточно, чтобы хотя бы  $k$  первых ком-

понент последовательностей  $\nu_0$  и  $\beta$  и, соответственно,  $\nu_1$  и  $\gamma$  совпадали. Теперь рассмотрим множество всех последовательностей  $\theta \in \Sigma$ , удовлетворяющих неравенству  $d_j(\theta, \nu_0) < 1/(m+1)^{l+k}$ . Воспользовавшись определением  $d_j$ , а также предыдущим неравенством, получим, что хотя бы  $k$  первых компонент последовательности  $\theta$  совпадет с соответствующими компонентами либо последовательности  $\nu_0$  либо  $\nu_1$ , следовательно,  $|\Phi_j(\theta) - \Phi_j(\nu_0)| < \varepsilon$ . Аналогично рассматривается случай, когда  $\nu_0$  имеет вид  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , где  $\alpha_i = m$  для всех  $i \geq l+1$ ,  $l \geq 1$  и  $\alpha_i < m$ . Лемма доказана.

Определим два множества  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$ . Удалим из множества всех последовательностей  $\Sigma$  последовательности вида  $(i_1, i_2, \dots)$ , где существует  $k \geq 1$ , что  $i_j = m$  при всех  $j \geq k$  за исключением последовательности, состоящей только из  $m$ :  $(m, m, \dots, m, \dots)$ , полученное множество последовательностей обозначим через  $\Sigma'$ . Удалим из множества всех последовательностей  $\Sigma$  последовательности вида  $(i_1, i_2, \dots)$ , где существует  $k \geq 1$ , что  $i_j = 0$  при всех  $j \geq k$  за исключением последовательности, состоящей только из 0:  $(0, 0, \dots, 0, \dots)$ , полученное множество последовательностей обозначим через  $\Sigma''$ .

**Лемма 2.6.** *Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  отображение  $\Phi_j$ , действующее из  $(\Sigma', d_j)$  на  $(A_j, \rho)$ , а также отображение  $\Phi_j$ , действующее из  $(\Sigma'', d_j)$  на  $(A_j, \rho)$ , является гомеоморфизмом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для каждого  $j = 0, 1, 2, \dots$  определим множе-



такой что  $\rho(z_0, z) < \delta$ , получаем последовательно:  $z \in T_{i_1}^{(j)}(A_j)$ ,  $z \in T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)}(A_j), \dots, z \in T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j)$ . Итак,  $B_{z_0}^\delta \subseteq T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)}(A_j)$ .

Снова рассмотрим  $\Phi_j^{-1}(z_0) = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots)$ . Выберем произвольное  $k \geq 1$ . В силу того, что  $z_0 \in A_j \setminus (B_0^{(j)} \cup \{x_0, x_m^{(j)}\})$ , можно выбрать  $l \geq 1$ , что среди членов последовательности  $i_{k+1}, \dots, i_{k+l}$  не все будут равны 0 или  $m$  одновременно. Рассмотрим произвольное  $z \in T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k+l}}^{(j)}(A_j)$ . Докажем, что первые  $k$  значений  $\Phi_j^{-1}(z)$  равны  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и только этим значениям. Если предположить, что существует натуральное  $n$  не превосходящее  $k$ , что  $z \in T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{n-1}}^{(j)}T_{i_n}^{(j)}(A_j) \cap T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{n-1}}^{(j)}T_{p_n}^{(j)}(A_j)$ , где  $p_n \neq i_n$ , тогда с необходимостью  $p_n = i_n - 1$  или  $p_n = i_n + 1$ . Пусть, скажем,  $p_n = i_n - 1$ . Из леммы 2.4 следует, что в этом случае  $\Phi_j^{-1}(z) = \{(i_1, i_2, \dots, i_n - 1, m, m, \dots, m, \dots), (i_1, i_2, \dots, i_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)\}$ , но это противоречит тому, что  $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_{k+l}, \dots) \in \Phi_j^{-1}(z)$ , поскольку, еще раз повторим, среди членов последовательности  $i_{k+1}, \dots, i_{k+l}$  не все будут равны 0 или  $m$  одновременно. Аналогично приходим к противоречию в случае  $p_n = i_n + 1$ .

Докажем теперь, что  $z_0 \in A_j \setminus B_0^{(j)}$  является точкой непрерывности  $\Phi_j^{-1} : (A_j, \rho) \rightarrow (\Sigma', d_j)$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  подберем  $k$  так, чтобы  $1/(m + 1)^k < \varepsilon$ . Пусть  $\Phi_j^{-1}(z_0) = (i_1, \dots, i_j, \dots, i_{j+k}, i_{j+k+1}, \dots, i_{j+k+l}, \dots)$ , при этом  $i_{j+k+1}, \dots, i_{j+k+l}$  не все равны 0 или  $m$  одновременно. Мы доказали что существует  $\delta > 0$ , что  $B_{z_0}^\delta \subseteq T_{i_1}^{(j)}T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_j}^{(j)}T_{i_{j+1}}^{(j)} \dots T_{i_{j+k}}^{(j)} \dots T_{i_{j+k+l}}^{(j)}(A_j)$ , но то-



гда, воспользовавшись предыдущим рассуждением, получаем, что для любого  $z \in B_{z_0}^\delta$  первые  $j + k$  цифр  $(m + 1)$ -ичного разложения  $\Phi_j^{-1}(z)$  совпадают с соответствующими цифрами в  $(m + 1)$ -ичном разложении числа  $\Phi_j^{-1}(z_0)$ , поэтому выполняется неравенство  $|\Phi_j^{-1}(z) - \Phi_j^{-1}(z_0)| \leq 1/(m + 1)^k < \varepsilon$ . Аналогично доказывается, что и  $x_0, x_m^{(j)}$  являются точками непрерывности.

Пусть теперь  $z_0 \in B_0^{(j)}$ , тогда

$$\Phi_j^{-1}(z_0) = \{(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, m, \dots), (i_1, i_2, \dots, i_k, 0, 0, \dots)\}, \quad (41)$$

где  $k \geq 1$  и  $i_k > 0$ .

Рассмотрим множество

$$B = T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)}(A_j) \\ \cup T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_k-1}^{(j)} T_m^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)}(A_j),$$

где  $T_0^{(j)}$  и  $T_m^{(j)}$  повторяются  $l \geq 2$  раз. Покажем, что существует

$\delta > 0$ , что  $B_{z_0}^\delta = \{z \in A_j : \rho(z, z_0) < \delta\} \subseteq B$ . Введем в рассмотрение:

$$\delta_1 = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq i_1} T_s^{(j)}(A_j)),$$

$$\delta_2 = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq i_2} T_{i_1}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)),$$

.....

$$\delta_{k-1} = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq i_{k-1}} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-2}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)),$$

$$\delta_k = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq i_k, s \neq i_{k-1}} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)),$$

$$\delta_{k+1} = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq 0} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)$$

$$\cup \bigcup_{s \neq m} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_{k-1}}^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)),$$

.....

$$\delta_{k+l} = \rho(z_0, \bigcup_{s \neq 0} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)$$

$$\cup \bigcup_{s \neq m} T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_{k-1}}^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)} T_s^{(j)}(A_j)).$$

Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_{k+l}\}$ . В силу (41) получим, что  $\delta > 0$ .

Исходя из построения  $\delta$ , для любой точки  $z$  из множества  $A_j$ , такой что  $\rho(z_0, z) < \delta$ , получаем последовательно:  $z \in T_{i_1}^{(j)}(A_j)$ ,

$$z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)}(A_j), \dots,$$

$$z \in T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_k}^{(j)} T_0^{(j)} \dots T_0^{(j)}(A_j) \cup T_{i_1}^{(j)} T_{i_2}^{(j)} \dots T_{i_{k-1}}^{(j)} T_{i_{k-1}}^{(j)} T_m^{(j)} \dots T_m^{(j)}(A_j).$$

Итак,  $B_{z_0}^\delta \subseteq B$ .

Рассмотрим произвольную точку  $z \in B$ . Используя лемму 2.4, получаем, что первые  $k + l - 1$  значений  $\Phi_j^{-1}(z)$  могут быть либо  $(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, \dots, m)$  либо  $(i_1, i_2, \dots, i_k, 0, \dots, 0)$ , где  $m$  и  $0$  соответственно повторяются  $l - 1$  раз. Далее, используя определение метрики  $d_j$ , получаем, что  $z_0 \in B_0^{(j)}$  является точкой непрерывности.

Совершенно аналогично доказывается, что  $\Phi_j^{-1} : (A_j, \rho) \rightarrow (\Sigma'', d_j)$ ,  $j \geq 0$  является непрерывным. Лемма доказана.

Непрерывность отображений  $\Phi_j : (\Sigma', d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  и  $\Phi_j : (\Sigma'', d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  следует из леммы 2.5. Лемма доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.3.** Докажем непрерывность отображения  $\Psi : ([0, +\infty), \lambda) \rightarrow (E, \rho)$ . Пусть  $x$  — произвольная точка из  $[0, +\infty)$ . Рассмотрим  $(m + 1)$ -ичное представление  $x$ :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m + 1)^{i-j}. \quad (42)$$

Если  $x$  нельзя представить в виде конечной  $(m + 1)$ -ичной дроби, то указанное представление (42) является единственным, заметим, что если  $j \geq 1$  в (42) мы считаем, что  $\sigma_1 \neq 0$ . Тогда непрерывность  $\Psi$  в  $x$  сразу следует из непрерывности отображения  $\Phi_j : (\Sigma, d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  (см. лемму 2.5) в точке  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots) \in \Sigma$ . Обратим внимание, что непрерывность в точке  $0$  также сразу вытекает из непрерывности отображения  $\Phi_0 : (\Sigma, d_0) \rightarrow (A_0, \rho)$ .

Пусть теперь все  $\sigma_i = 0$ , начиная с некоторого  $l \geq 2$ , и  $\sigma_{l-1} > 0$ , т. е.  $x$  имеет представление в виде конечной  $(m + 1)$ -ичной дроби

(мы исключаем случай, когда  $x = 0$ ). Если в представлении (42) значение  $j \geq 1$ , тогда  $\sigma_1$  мы считаем отличным от нуля. Непрерывность справа и слева в точке  $x$  вытекает из непрерывности  $\Phi_j : (\Sigma', d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  и  $\Phi_j : (\Sigma'', d_j) \rightarrow (A_j, \rho)$  соответственно. Непрерывность  $\Psi : ((-\infty, 0], \lambda) \rightarrow (S(E), \rho)$ , следует из того, что для любого  $x \in (-\infty, 0]$  выполняется равенство  $\Psi(x) = S \circ \Psi(-x)$ .

Покажем, что  $\Psi$  является взаимнооднозначным отображением  $\mathbb{R}$  на  $E'$ . Из определения отображения  $\Psi$ , а также из теоремы 2.1 следует, что  $\Psi([0, +\infty)) = E$ , кроме того, поскольку для всех  $x \in (-\infty, 0]$  выполняется равенство  $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$ , мы имеем соотношение  $\Psi((-\infty, 0]) = S(E)$ . Следовательно,  $\Psi(\mathbb{R}) = E'$ .

Прежде всего рассмотрим случай, когда  $x, y \in [0, +\infty)$  при этом  $x < y$ . Предположим, что  $\Psi(x) = \Psi(y)$ . Рассмотрим  $(m + 1)$ -ичные представления для  $x$  и  $y$ :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m + 1)^{i-j}$$

и

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i / (m + 1)^{i-j}.$$

Тогда из определения  $\Psi$  следует

$$\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)) = \Phi_j((\tau_1, \dots, \tau_j, \dots)).$$

Но из теоремы 2.1 и леммы 2.4 следует, что одна из последовательностей  $(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots)$  или  $(\tau_1, \dots, \tau_j, \dots)$  имеет вид  $(i_1, i_2, \dots, i_k, 0, 0, 0, \dots)$ , а

другая  $(i_1, i_2, \dots, i_k - 1, m, m, m, \dots)$ ,  $i_k > 0$ ,  $k \geq 1$ , откуда мы получаем противоречие с тем, что  $x \neq y$ .

Пусть теперь  $x, y \in \mathbb{R}$  — две произвольные различные точки. Тогда доказательство того, что  $\Psi(x) \neq \Psi(y)$  сводится к предыдущему случаю (когда  $x, y \in [0, +\infty)$ ) с помощью равенства  $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$ , которое выполняется для всех  $x \in (-\infty, 0]$ .

Установим непрерывность  $\Psi^{-1} : (E, \rho) \rightarrow ([0, +\infty), \lambda)$ . Пусть  $x_0$  — произвольная точка множества  $E$ . Из определения  $E$  следует, что существует  $j \geq 0$ , что  $x_0 \in A_j$ . Возьмем произвольное  $\gamma > 0$  и рассмотрим  $\gamma$ -окрестность точки  $x_0$  на  $E$ :  $U_\gamma = \{x \in E : \rho(x, x_0) < \gamma\}$ . Из того, что множество  $A_0$  содержит по крайней мере две различные точки выводим, что  $c := \text{diam}(A_0) > 0$ , поэтому  $\text{diam}(A_j) = c/r^j$  (см. первое равенство в условии согласования (32)), т. е.  $\text{diam}(A_j) \rightarrow +\infty$  при  $j \rightarrow +\infty$ . Следовательно, существует  $k \geq j$ , что  $U_\gamma \subseteq A_k$ .

Теперь возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и попытаемся найти  $0 < \delta < \gamma$ , что для всех  $x \in E$ , таких что  $\rho(x, x_0) < \delta$  выполняется неравенство  $|\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(x_0)| < \varepsilon$ . Отображения  $\Phi_k^{-1} : (A_k, \rho) \rightarrow (\Sigma', d_k)$  и  $\Phi_k^{-1} : (A_k, \rho) \rightarrow (\Sigma'', d_k)$  — непрерывны, поэтому существует  $0 < \delta < \gamma$ , что для всех  $x \in E$ , таких что  $\rho(x, x_0) < \delta$  выполняется  $d_k(\Phi_k^{-1}(x), \Phi_k^{-1}(x_0)) < \varepsilon$ , осталось заметить, что  $d_k(\Phi_k^{-1}(x), \Phi_k^{-1}(x_0)) = |\Psi^{-1}(x) - \Psi^{-1}(x_0)|$ .

Пусть теперь  $x \in S(E)$ , тогда  $\Psi^{-1}(x) = -\Psi^{-1} \circ S^{-1}(x)$ , из этого представления и следует непрерывность  $\Psi^{-1}$  на  $S(E)$ . Предложение

доказано.

Введем обозначения:

$$b = \min_{x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)} \rho(x, x_0) \quad (43)$$

и

$$B = \max_{x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)} \rho(x, x_0). \quad (44)$$

Заметим, что  $b > 0$ , поскольку  $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)$  (см. первое равенство в лемме 2.3).

**Лемма 2.7.** *Для любого  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k)$ ,  $k \geq 1$  выполняется соотношение:  $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из условий согласования (32) следует, что если

$$x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k),$$

то  $T_0^{(k)}(x) \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k-1)}(A_{k-1})$ . Далее, пользуясь тем, что  $x_0$  — неподвижная точка преобразования  $T_0^{(k)}$ , получаем

$$\rho(x_0, T_0^{(k)}(x)) = \rho(T_0^{(k)}(x_0), T_0^{(k)}(x)) = r\rho(x_0, x).$$

Следовательно, для любого  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k)$  имеет место равенство  $\rho(x_0, x) = r^{-1}\rho(x_0, T_0^{(k)}(x))$  из которого и следует утверждение леммы.

**Лемма 2.8.** Для любого  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$ ,  $k \leq 0$  выполняется соотношение:  $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $k = 0$ . Пусть  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_i(A_0)$ , тогда существует  $y \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)$ , что  $T_0^{(1)}(y) = x$ . Далее, пользуясь тем, что  $x_0$  — неподвижная точка преобразования  $T_0^{(1)}$ , получаем  $\rho(x_0, x) = \rho(x_0, T_0^{(1)}(y)) = \rho(T_0^{(1)}(x_0), T_0^{(1)}(y)) = r\rho(x_0, y)$ , поэтому  $\rho(x_0, x) = r\rho(x_0, y)$ . Из последнего равенства получаем утверждение леммы для случая  $k = 0$ . Пусть теперь  $k < 0$ . В этом случае  $T_0^k(x) \in \bigcup_{i=1}^m T_i(A_0)$ . Но тогда существует  $y \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)$ , что  $\rho(x_0, T_0^k(x)) = r\rho(x_0, y)$ , кроме того выполняются равенства  $\rho(x_0, T_0^k(x)) = \rho(T_0^k(x_0), T_0^k(x)) = r^k\rho(x_0, x)$ . Следовательно,  $\rho(x_0, x) = r^{-k+1}\rho(x_0, y)$ , откуда мы и получаем утверждение леммы.

Рассмотрим произвольную последовательность  $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$ .

**Лемма 2.9.** Пусть  $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$  некоторая последовательность действительных чисел, тогда для любого натурального  $n$  выполняются неравенства

$$br|Z_n|^{1/d} \leq \rho(\Psi(|Z_n|), x_0) \leq B|Z_n|^{1/d},$$

где  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $Z_n = 0$  утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим случай, когда  $|Z_n| > 0$ . Существует целое  $k$ , такое что

$$(m+1)^{k-1} \leq |Z_n| < (m+1)^k,$$

значение  $k$  в этом случае равно  $[\log_{m+1} |Z_n|] + 1$  (здесь через  $[z]$  обозначена целая часть числа  $z$ ), кроме того, в силу определения отображения  $\Psi$ , если  $k \geq 1$ , то  $\Psi(|Z_n|) \in A_k$ , более того,

$$\Psi(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k). \quad (45)$$

Подробнее остановимся на соотношении (45). Прежде всего заметим, что

$T_0^{(k)}(A_k) = A_{k-1}$  (см. (32)), кроме того,  $|Z_n|$  имеет ровно  $k$   $(m+1)$ -ичных знаков в целой части. Следовательно, в силу определения  $\Psi$  получим  $\Psi(|Z_n|) \notin A_{k-1} \setminus (A_k \cap A_{k-1})$ , стало быть выполняется (45).

Если же  $k \leq 0$ , то  $1 \leq |Z_n|(m+1)^{-k+1} < m+1$ . Поэтому из определения  $\Psi$ , теоремы 2.1 и леммы 2.1 следует, что  $\Psi(|Z_n|) = T_0^{-k+1}(\Psi(|Z_n|(m+1)^{-k+1}))$ . Заметим, что  $\Psi(|Z_n|(m+1)^{-k+1}) \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1)$  (см. соотношение (45)), поэтому  $\Psi(|Z_n|) \in T_0^{-k+1}(\bigcup_{i=1}^m T_i^{(1)}(A_1))$  или  $\Psi(|Z_n|) \in T_0^{-k}(\bigcup_{i=1}^m T_0 \circ T_i^{(1)}(A_1))$ , далее, используя условия согласования (32), получаем

$$\Psi(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^m T_0^{-k} \circ T_i(A_0).$$



Из лемм 2.7 и 2.8 выводим неравенство:

$$br^{-[\log_{m+1} |Z_n|]} \leq \rho(\Psi(|Z_n|), x_0) \leq Br^{-[\log_{m+1} |Z_n|]}. \quad (46)$$

Из (46) получаем утверждение леммы.

Перейдем к доказательству утверждений для *несвязного случая*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.4. Рассмотрим случай, когда  $x \in [0, +\infty)$ . Прежде всего пусть  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$ ,  $j \geq 0$  не имеет двойственного  $(m+1)$ -ичного представления. Неоднозначность представления  $x$  в виде указанной суммы возникает в случае, когда  $\sigma_1 = 0$  при этом  $j \geq 1$ . Но из леммы 2.1 следует, что  $\Phi_j((\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots)) = \Phi_{j-1}((\sigma_2, \sigma_3, \dots))$ . Откуда, используя определение  $\Psi$ , получаем, что  $\Psi(x)$  определяется однозначно.

Пусть теперь  $x$  имеет двойственное  $(m+1)$ -ичное представление, т. е.  $x$  можно представить в виде  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (m+1)^{i-j}$ ,  $j \geq 0$ , где  $\sigma_1 \dots \sigma_j \dots$ , такие что  $\sigma_n = 0$  при всех  $n$  начиная с некоторого номера  $l \geq 1$ , а  $\sigma_l \neq 0$ , тогда  $\Psi(x)$  состоит из ровно двух различных точек, а именно:

$$\Psi(x) = \{\Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l, 0, 0, 0, \dots)), \Phi_j((\sigma_1, \dots, \sigma_l - 1, m, m, m, \dots))\},$$

причем в случае, когда  $j \geq 1$  опять же в силу леммы 2.1 можно считать, что  $\sigma_1 \neq 0$ .

Теперь рассмотрим случай, когда  $x \in (-\infty, 0]$ . Если  $x$  не имеет двойственного  $(m+1)$ -ичного представления, тогда  $\Psi(x)$  определя-

ется однозначно, это следует из того, что  $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$ . Если же  $x$  имеет двойственное  $(m+1)$ -ичное представление, то  $\Psi(-x)$  состоит из ровно двух точек, поэтому и  $\Psi(x)$  состоит из двух различных точек, т. к.  $\Psi(x) = S(\Psi(-x))$ . Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.5. Непрерывность справа и слева функций  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$  в точках с двойственным  $(m+1)$ -ичным представлением, непрерывность этих функций в точках, не имеющих двойственного  $(m+1)$ -ичного представления сразу следует из непрерывности  $\Phi_j : (\Sigma, d) \rightarrow (A_j, \rho)$ ,  $j \geq 0$  и определения метрики  $d$ .

Покажем, например, что  $\Psi^{(1)}$  непрерывна справа на  $[0, +\infty)$  в точках с двойственным  $(m+1)$ -ичным представлением. Пусть  $x \geq 0$  — такая точка. Для любого натурального  $n$  можно подобрать  $\delta$ , что все точки из  $[x, x + \delta)$  имеют  $n$  первых совпадающих  $(m+1)$ -ичных знаков, но это означает, что соответствующие этим точкам символьные последовательности можно сделать сколь угодно близкими в смысле метрики  $d$ , далее, осталось воспользоваться определением  $\Psi$  и непрерывностью  $\Phi_j : (\Sigma, d) \rightarrow (A_j, \rho)$ ,  $j \geq 0$ .

Далее, покажем, что  $\Psi^{(1)}$  непрерывна слева на интервале  $(-\infty, 0]$  в точках с двойственным  $(m+1)$ -ичным представлением. Пусть  $x \in (-\infty, 0]$ , тогда выполняется равенство  $\Psi^{(1)}(x) = S(\Psi^{(1)}(-x))$  (см. определение  $\Psi$ ), из последнего равенства и вытекает непрерывность слева в точке  $x$ . Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.6. Покажем, что  $\Phi_j^{-1}$  является непрерывным отображением пространства  $(A_j, \rho)$  на пространство  $(\Sigma, d_j)$  (метрика  $d_j$  определяется в (38)). Отметим, что  $\Phi_j^{-1}$  является непрерывным отображением  $(A_j, \rho)$  на  $(\Sigma, d)$ , где на симметричном пространстве рассматривается метрика  $d$ . Возьмем произвольную точку  $x_0 \in A_j$ . Для любого наперед заданного  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $\rho(x, x_0) < \delta$ , выполняется  $d(\Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(x_0)) < \varepsilon$ . Из определения метрики  $d$  следует, что для любого натурального  $N$  при достаточно малом  $\varepsilon$  первые  $N$  символов в последовательностях  $\Psi^{-1}(x)$  и  $\Psi^{-1}(x_0)$  совпадают, но это означает, что и  $d_j(\Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(x_0))$  можно сделать сколь угодно малым. Из доказанной непрерывности  $\Phi_j^{-1}$ , а также из определения  $\Psi$ , следует непрерывность  $\Psi^{-1} : (E, \rho) \rightarrow ([0, +\infty), \lambda)$ . Пусть теперь  $x \in S(E)$ , тогда  $\Psi^{-1}(x) = -\Psi^{-1} \circ S^{-1}(x)$ , из этого представления и следует непрерывность  $\Psi^{-1}$  на  $S(E)$ .

Вторая часть предложения, т. е. то, что отображение  $\Psi : (\mathbb{R}, \lambda) \rightarrow (E', f)$  является непрерывным, сразу следует из определения метрики  $f$ . Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7. В случае, если  $A_0$  — несвязное будем считать, что  $\Psi$  совпадает с  $\Psi^{(1)}$  — это несколько не ограничивает общности, поскольку  $\Psi(\mathbb{R})$  и  $\Psi^{(1)}(\mathbb{R})$  отличаются лишь на счетное множество точек.

Прежде всего докажем предложение для неотрицательных  $x, y$ .

Пусть  $x = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(m+1)^i}$ ,  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq m$  и  $y = x + \frac{1}{(m+1)^n}$ .

Покажем, что

$$\mu^d(\Psi([x, y])) = 1/(m+1)^n. \quad (47)$$

Действительно, из построения  $\Psi$  следует, что  $\Psi([x, y]) = T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_n}(A_0)$ , но тогда из теоремы 1.2 получаем равенство  $\mu^d(\Psi([x, y])) = r^{nd}$ , осталось вспомнить, что  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ .

Рассмотрим теперь произвольный интервал  $[x, y)$ . Этот интервал можно представить в виде объединения не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов вида  $[x + \frac{k}{(m+1)^n}, x + \frac{k+1}{(m+1)^n})$ ,  $k = 0, 1, \dots; n = 0, 1, \dots$ , осталось воспользоваться счетной аддитивностью меры  $\mu^d$  на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$  и соотношением (47).

Докажем предложение для неположительных  $x, y$ . В силу определения  $\Psi$  имеем  $\Psi([x, y]) = S(\Psi((-y, -x]))$ , где  $S$  — изометрическое преобразование, тем самым, представленный случай свелся к предыдущему.

Пусть теперь  $x < 0$  и  $y > 0$ , тогда  $\Psi([x, y]) = \Psi([x, 0]) \cup \Psi([0, y])$ , следовательно, этот случай свелся к двум предыдущим. Предложение доказано.

Доказательство следующих трех лемм полностью аналогично доказательству лемм 2.7, 2.8, 2.9.

**Лемма 2.10.** Для любого  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k)$ ,  $k \geq 1$  выполняется

соотношение:  $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$ .

**Лемма 2.11.** Для любого  $x \in \bigcup_{i=1}^m T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$ ,  $k \leq 0$  выполняется соотношение:  $br^{-k+1} \leq \rho(x, x_0) \leq Br^{-k+1}$ .

**Лемма 2.12.** Пусть  $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$  некоторая последовательность действительных чисел, тогда для любого натурального  $n$  выполняются неравенства

$$br|Z_n|^{1/d} \leq \rho(\Psi^{(1)}(|Z_n|), x_0) \leq B|Z_n|^{1/d},$$

где  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ .

**Лемма 2.13.** Пусть  $\{Z_n\}_{n=1,2,3,\dots} \subseteq \mathbb{R}$  некоторая последовательность действительных чисел, тогда для любого натурального  $n$  выполняются неравенства

$$br|Z_n|^{1/d} \leq \rho(\Psi^{(2)}(|Z_n|), x_0) \leq B|Z_n|^{1/d},$$

где  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если  $Z_n = 0$  утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай, когда  $|Z_n| > 0$ . Существует целое  $k$ , такое что  $(m+1)^{k-1} < |Z_n| \leq (m+1)^k$ , значение  $k$  в этом случае удовлетворяет неравенству  $\log_{m+1} |Z_n| \leq k < \log_{m+1} |Z_n| + 1$ . Далее, если  $k \geq 0$ , то  $\Psi^{(2)}(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^m T_i^{(k)}(A_k)$ ; если же  $k < 0$ , то  $\Psi^{(2)}(|Z_n|) \in \bigcup_{i=1}^m T_0^{-k} \circ T_i(A_0)$ . Используя леммы 2.10, 2.11, полу-

чаем неравенство:

$$br^{-\log_{m+1}|Z_n|+1} \leq \rho(\Psi^{(2)}(|Z_n|), x_0) \leq Br^{-\log_{m+1}|Z_n|}. \quad (48)$$

Из (48) получаем утверждение леммы.

Следующие утверждения доказываются как для связного, так и для несвязного случая.

**Лемма 2.14.** Пусть  $\zeta_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  — последовательность случайных величин, такая что  $c_1(\langle \zeta_n^2 \rangle)^{1/d} \leq \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle \leq c_2(\langle \zeta_n^2 \rangle)^{1/d}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — положительные константы и  $d = -\ln(m+1)/\ln r$ . Тогда выполняются следующие неравенства

$$b^2 r^2 c_1 (\langle \zeta_n^2 \rangle)^{1/d} \leq \langle \rho^2(\Psi^{(k)}(|\zeta_n|), x_0) \rangle \leq c_2 B^2 (\langle \zeta_n^2 \rangle)^{1/d},$$

где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $b$  и  $B$  — константы, определенные выше (см. (43), (44)).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из леммы 2.9 вытекают следующие неравенства:

$$b^2 r^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle \leq \langle \rho^2(\Psi(|\zeta_n|), x_0) \rangle \leq B^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle,$$

Из лемм 2.12, 2.13 получаем неравенства:

$$b^2 r^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle \leq \langle \rho^2(\Psi^{(1)}(|\zeta_n|), x_0) \rangle \leq B^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle$$

и

$$b^2 r^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle \leq \langle \rho^2(\Psi^{(2)}(|\zeta_n|), x_0) \rangle \leq B^2 \langle |\zeta_n|^{2/d} \rangle.$$

Далее, используя неравенства в условии леммы, а также то, что в случае связного пространства  $(E', \rho)$  функции  $\Psi^{(1)}$  и  $\Psi^{(2)}$  совпадают, получаем утверждение леммы.

Следующие две леммы можно найти, например, в [27, стр. 89, 90]. В леммах 2.15 – 2.17 через  $S_n$  обозначим сумму  $\sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и полагаем  $S_0 = 0$ .

**Лемма 2.15.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины,  $\langle \xi_k \rangle = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $p \geq 2$ . Тогда

$$\langle |S_n|^p \rangle \leq c(p)n^{p/2-1} \sum_{k=1}^n \langle |\xi_k|^p \rangle,$$

где  $c(p)$  – положительная константа, зависящая только от  $p$ .

**Лемма 2.16.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – независимые случайные величины,  $\langle |\xi_1|^p \rangle < \infty$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Положим

$$\Lambda_n(y, p) = \left( \sum_{k=1}^n \int_{|x|<y} x^2 d\bar{V}_k(x) \right)^{p/2} + \sum_{k=1}^n \int_{|x|\geq y} |x|^p d\bar{V}_k(x)$$

и  $\lambda_n(p) = \inf_{y \geq 0} \Lambda_n(y, p)$ , где  $\bar{V}_k(x)$  – функция распределения симметризованной случайной величины  $\xi_k$ .

Если  $1 \leq p < 2$  и  $\langle \xi_k \rangle = 0$  для всех  $k$ , то

$$c_1(p)\lambda_n(p) \leq \langle |S_n|^p \rangle \leq c_2(p)\lambda_n(p).$$

Если  $0 < p < 1$  и каждая случайная величина  $\xi_k$  имеет нуль

своей медианой (т. е.  $\mathbf{P}(\xi_k \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_k \leq 0) = 1/2$ ), то

$$c_1(p)\lambda_n(p) \leq \langle |S_n|^p \rangle \leq 2\lambda_n(p).$$

Здесь  $c_1(p)$ ,  $c_2(p)$  — положительные постоянные, зависящие только от  $p$ .

Используя леммы 2.15 и 2.16, докажем лемму 2.17.

**Лемма 2.17.** Пусть  $\{\xi_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда, если  $\langle |\xi_1|^{\max(2,p)} \rangle < \infty$  при  $p \geq 1$ , то имеют место неравенства

$$c_1 n^{p/2} \leq \langle |S_n|^p \rangle \leq c_2 n^{p/2}, \quad (49)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$ .

Если к тому же случайная величина  $\xi_1$  имеет ноль своей медианой, то (49) выполняется и при  $0 < p < 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $p \geq 2$ , тогда, используя неравенство Ляпунова (см., например, [41, стр. 210]), получаем

$$(\langle S_n^2 \rangle)^{1/2} \leq (\langle |S_n|^p \rangle)^{1/p},$$

откуда следует нижняя оценка для  $\langle |S_n|^p \rangle$  в (49), где константа  $c_1 = 1$ . Применяя лемму 2.15, получаем верхнюю оценку для  $\langle |S_n|^p \rangle$  в (49), где постоянная  $c_2 = c(p)\langle |\xi_1|^p \rangle$ .



Пусть теперь  $0 < p < 2$ . Опять же, используя неравенство Ляпунова, получаем

$$(\langle |S_n|^p \rangle)^{1/p} \leq (\langle S_n^2 \rangle)^{1/2}.$$

Откуда выводим верхнюю оценку для  $\langle |S_n|^p \rangle$  в (49) с константой  $c_2 = 1$ .

Из леммы 2.16 следует, что

$$\begin{aligned} & \langle |S_n|^p \rangle \\ & \geq c_1(p) \inf_{y \geq 0} \left( n^{p/2} \left( \int_{|x| < y} x^2 d\bar{V}_1(x) \right)^{p/2} + n \int_{|x| \geq y} |x|^p d\bar{V}_1(x) \right) \\ & \geq c_1(p) n^{p/2} \inf_{y \geq 0} \left( \left( \int_{|x| < y} x^2 d\bar{V}_1(x) \right)^{p/2} + \int_{|x| \geq y} |x|^p d\bar{V}_1(x) \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{V}_1(\cdot)$  — функция распределения симметризованной случайной величины  $\xi_1$ , причем при  $0 < p < 1$  требуется, чтобы случайная величина  $\xi_1$  имела ноль своей медианой.

Итак, имеем

$$\begin{aligned} & \langle |S_n|^p \rangle \\ & \geq c_1(p) \inf_{y \geq 0} \left( \left( \int_{|x| < y} x^2 d\bar{V}_1(x) \right)^{p/2} + \int_{|x| \geq y} |x|^p d\bar{V}_1(x) \right) n^{p/2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Заметим, что константа

$$\inf_{y \geq 0} \left( \left( \int_{|x| < y} x^2 d\bar{V}_1(x) \right)^{p/2} + \int_{|x| \geq y} |x|^p d\bar{V}_1(x) \right)$$

в правой части неравенства (50) отлична от нуля, так как случай-

ная величина  $\xi_1$  по условию леммы является невырожденной. В итоге, мы получили оценку снизу для  $\langle |S_n|^p \rangle$  с константой  $c_1 = \inf_{y \geq 0} \left( \left( \int_{|x| < y} x^2 d\bar{V}_1(x) \right)^{p/2} + \int_{|x| \geq y} |x|^p d\bar{V}_1(x) \right) c_1(p)$ . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Для  $\zeta_n = S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  выполняется условие леммы 2.14, так как  $S_n$ , в силу леммы 2.17, удовлетворяет неравенству

$$c_1(\langle S_n^2 \rangle)^{p/2} \leq \langle |S_n|^p \rangle \leq c_2(\langle S_n^2 \rangle)^{p/2},$$

где  $p = 2/d$ . Поэтому из леммы 2.14 выводим

$$b^2 r^2 c_1 n^{1/d} \leq \langle \rho^2(\Psi^{(k)}(|\zeta_n|), x_0) \rangle \leq c_2 B^2 n^{1/d}, \quad k = 1, 2,$$

где в связном случае отображение  $\Psi^{(1)}$  совпадает с  $\Psi^{(2)}$ . Откуда, положив  $d_1 = b^2 r^2 c_1$  и  $d_2 = c_2 B^2$ , получим заключение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.8. Будем считать, что  $\gamma(t) \subseteq E$  для всех  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим непрерывное отображение  $\beta(t) = \Psi^{-1}(\gamma(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ . Существуют точки  $t_0, t_1 \in [0, 1]$ , что  $\beta(t_0) < \beta(t_1)$ , обозначим  $\beta(t_0)$  и  $\beta(t_1)$  через  $m_0$  и  $m_1$  соответственно. В силу непрерывности  $\beta$ , существует непустое открытое множество  $U$  на отрезке  $[0, 1]$ , что  $\gamma(U) = \Psi((m_0, m_1))$ . Поскольку отображение  $\Psi^{-1} : (E', \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \lambda)$  — непрерывное, поэтому множество  $\Psi((m_0, m_1))$  является открытым относительно топологии, порожденной метрикой  $\rho$ , кроме того, существует  $j \geq 0$ , что  $\Psi((m_0, m_1)) \subseteq A_j$ . Рассмот-

рим произвольную точку  $x_0 \in \Psi((m_0, m_1))$ , пусть  $(i_1, \dots, i_n, \dots) \in \Phi_j^{-1}(x_0)$ . Тогда  $x_0 \in T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j)$  при этом  $\text{diam}(T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j)) = r^n \text{diam}(A_j)$ , поэтому при достаточно больших  $n$  выполняется включение  $T_{i_1}^{(j)} \dots T_{i_n}^{(j)}(A_j) \subseteq \Psi((m_0, m_1))$ , но размерность Хаусдорфа не меняется после преобразований подобия, размерность же множества  $A_j$  совпадает размерностью  $E$  (см. замечание 2.1), следовательно,  $\dim(E) = \dim(\Psi((m_0, m_1)))$ , откуда и следует утверждение предложения.

## 2.5 Результаты главы 2

Во второй главе построена математическую модель случайного блуждания на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой. Суть этой модели в следующем. При параметризации множеств числовой прямой мы рассматриваем последовательность сумм независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с соответствующим числом моментов, представляющую случайное блуждание на этой прямой. После топологического вложения в евклидово пространство для множеств канторовского типа средний квадрат расстояния от блуждающей точки до начала координат в момент времени  $n$  ведет себя пропорционально  $n^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , а для множеств типа кривой Коха — пропорционально  $n^\alpha$ ,  $\alpha < 1$ . Отметим, что параметризация самоподобных континуумов, а также топологическое вложение этих континуумов в евкли-

дово пространство будет существенно использоваться в следующей главе.

## ГЛАВА 3

### Аномальная диффузия как деформация классической диффузии

#### 3.1 Введение

Математическое моделирование фрактальной кинетики основано на двух свойствах. Первое — это наличие сингулярных зон в фазовом пространстве, существенно влияющих на процесс переноса (например, зоны залипания). Второе — возникновение фрактальной структуры в этих сингулярных зонах, причем фрактальность связана со свойством масштабируемости динамики процесса (см. [14]). Принято считать (см., например, [13], [34]), что эти свойства требуют поиска новых форматов для фрактальной кинетики. Более того, для таких форматов не обнаружено универсальной структуры, в отличие от случая винеровских процессов, используемых в качестве классического формата броуновского движения.

Общим свойством процессов фрактальной кинетики является специфичность топологии сингулярных зон фазового пространства. Эта специфичность связана с алгоритмом моделирования сингулярных зон. Отметим, что в этой главе как и в предыдущей сингулярные зоны будут моделироваться самоподобными множествами, являющимися инвариантами систем итерированных отображений. При таком моделировании сингулярные зоны параметризуются связным кон-

тинуумом и представляют собой «параллельное» по отношению к исходному фазовое пространство со своей естественной топологией.

Основным результатом настоящей главы являются теоремы 3.1 и 3.2. Доказательство всех утверждений вынесено в раздел 3.4.

Основные результаты третьей главы опубликованы в [71].

### 3.2 Предварительные обозначения и утверждения

Прежде всего отметим, что мы будем использовать конструкции и утверждения, а также придерживаться схемы изложения главы 2. В этом смысле на пути к основному результату в этом параграфе мы приведем построение параметризации объединения специальных множеств с самоподобной структурой числовой прямой.

Пусть  $(X, \rho)$  — полное метрическое пространство. Мы будем рассматривать непустое компактное множество  $A_0$ , такое что

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^m T_i(A_0), \quad m \geq 1. \quad (51)$$

Будем считать (как и во второй главе), что выполняется одно из условий (см. соотношения (30) и (34)):

1)  $T_i(x_0) = T_{i-1}(x_m)$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . Кроме того,

$$T_i(A_0) \cap T_j(A_0) = \begin{cases} \{T_{i'}(x_0)\} & \text{при } |i - j| = 1, \\ \emptyset & \text{при } 0 < |i - j| \neq 1, \end{cases}$$

где  $i' = \max(i, j)$ ;

2)  $T_k(A_0) \cap T_l(A_0) = \emptyset$  при всех  $k \neq l$ .

Рассмотрим последовательность множеств  $A_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , где  $A_j = T_0^{-j}(A_0)$  и преобразования  $T_i^{(j)} = T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

**Замечание 3.1.** Отрезок  $[0, 1]$  числовой прямой, обозначим его через  $A_0$ , является примером связного самоподобного множества. Преобразования  $T_0(x) = \frac{1}{3}x$ ,  $T_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  и  $T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , очевидно, обладают свойством:  $A_0 = T_0(A_0) \cup T_1(A_0) \cup T_2(A_0)$ . Кроме того,  $T_0(A_0) \cap T_1(A_0) = \{1/3\}$  и  $T_1(A_0) \cap T_2(A_0) = \{2/3\}$ . Неподвижными точками преобразований  $T_0$  и  $T_2$  являются точки 0 и 1. Определим последовательность множеств  $A_j$ ,  $j \geq 0$ :

$$A_j = \{3^j x : x \in A_0\}. \quad (52)$$

На каждом из  $A_j$  зададим функции:  $T_0^{(j)} = \frac{1}{3}x$ ,  $T_1^{(j)} = \frac{1}{3}x + 3^{j-1}$  и  $T_2^{(j)} = \frac{1}{3}x + 2 \cdot 3^{j-1}$ ,  $j \geq 0$ . Для преобразований  $T_i^{(j)}$ ,  $i = 0, 1, 2$  и множеств  $A_j$ ,  $j \geq 0$  выполняется условие согласования (32). Кроме того, очевидно, что  $\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$  совпадает с множеством всех действительных неотрицательных чисел.

Классическое множество Кантора на отрезке  $[0, 1]$  числовой прямой, обозначим его буквой  $K_0$ , является одним из примеров несвязного самоподобного множества. Для множества  $K_0$  существуют два преобразования подобия  $T_0(x) = \frac{1}{3}x$  и  $T_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ , такие что  $K_0 = T_0(K_0) \cup T_1(K_0)$  и  $T_0(K_0) \cap T_1(K_0) = \emptyset$ . Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна  $d = \ln 2 / \ln 3$  (см., например, [36], [44],

[46]).

Определим последовательность множеств  $K_j$ ,  $j \geq 0$  таким образом:

$$K_j = \{3^j x : x \in K_0\}. \quad (53)$$

На  $K_j$  зададим функции:  $T_0^{(j)} = \frac{1}{3}x$  и  $T_1^{(j)} = \frac{1}{3}x + 2 \cdot 3^{j-1}$ ,  $j \geq 0$ . Для каждого  $j \geq 0$  непосредственно проверяется, что  $K_j = T_0^{(j)}(K_j) \cup T_1^{(j)}(K_j)$  и  $T_0^{(j)}(K_j) \cap T_1^{(j)}(K_j) = \emptyset$  и, кроме того, выполняется условие согласования (32).

Классическое множество Кантора на отрезке  $[0, 1]$  числовой прямой, обозначим его буквой  $K_0$ , является одним из примеров несвязного самоподобного множества. Для множества  $K_0$  существуют два преобразования подобия  $T_0(x) = \frac{1}{3}x$  и  $T_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ , такие что  $K_0 = T_0(K_0) \cup T_1(K_0)$  и  $T_0(K_0) \cap T_1(K_0) = \emptyset$ . Размерность Хаусдорфа множества Кантора равна  $d = \ln 2 / \ln 3$  (см., например, [36], [44], [46]).

Определим последовательность множеств  $K_j$ ,  $j \geq 0$  таким образом:

$$K_j = \{3^j x : x \in K_0\}. \quad (54)$$

На  $K_j$  зададим функции:  $T_0^{(j)} = \frac{1}{3}x$  и  $T_1^{(j)} = \frac{1}{3}x + 2 \cdot 3^{j-1}$ ,  $j \geq 0$ . Для каждого  $j \geq 0$  непосредственно проверяется, что  $K_j = T_0^{(j)}(K_j) \cup T_1^{(j)}(K_j)$  и  $T_0^{(j)}(K_j) \cap T_1^{(j)}(K_j) = \emptyset$  и, кроме того, выполняется усло-



вие согласования (32). Другие примеры можно найти в [2, замечание 2].

Введем в рассмотрение непустое компактное в  $(X, \rho)$  множество  $B_0$ , удовлетворяющее следующему равенству:

$$B_0 = \bigcup_{i=0}^s T_{k_i}(B_0), \quad (55)$$

где  $k_0 = 0$  и  $0 \leq k_{i-1} < k_i \leq m$ ,  $i = 1, \dots, s$  и  $1 \leq s < m$ .

Заметим, что  $B_0 \subset A_0$  и  $B_0$  является несвязным.

Определим последовательность множеств  $B_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , положив  $B_j = T_0^{-j}(B_0)$ .

Рассмотрим множество  $E_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ . Из (32) и (33) следует, что  $B_{i-1} \subseteq B_i$  при всех  $i = 1, 2, \dots$ . Совершенно аналогично соответствию  $\Psi$  определим  $\Psi_0 : [0, +\infty) \rightarrow E_0$  (для  $B_j$  и  $\{T_{k_i}^{(j)}\}_{i=0, \dots, s}$  имеет место теорема 2.1). Заметим, что для всякого  $x \in [0, +\infty)$ , не имеющего двойственного  $(s+1)$ -ичного представления, выполняется равенство:

$$\Psi_0(x) = \Psi \left( \sum_{i=1}^{\infty} k_{\sigma_i} / (m+1)^{i-j} \right),$$

где  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i / (s+1)^{i-j}$ .

Напомним, мы предполагаем, что существует изометрическое преобразование  $S : (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ , такое что  $S(E) \cap E$  — одноточечное множество при этом  $S(x_0) = x_0$ .

С помощью преобразования  $S$  доопределим  $\Psi_0$  на  $(-\infty, 0]$ :

$$\Psi_0(x) = S(\Psi_0(-x)).$$

Кроме того, обозначим

$$E'_0 := E_0 \cup S(E_0). \quad (56)$$

В следующем предложении мы покажем, как изменяется размерность Хаусдорфа множеств  $E'$  и  $E'_0$  при замене метрики  $\rho$  на  $f$ .

**Предложение 3.1.** *Размерность Хаусдорфа пространств  $(E', f)$  и  $(E'_0, f)$  равна 1 и  $\ln(s+1)/\ln(m+1)$  соответственно.*

Исключим из рассмотрения рациональные дроби с периодом  $s$ , в этом случае соответствие  $\Psi_0$  станет однозначным, обозначим ее через  $\Psi_0^{(1)}$ . Исключив из рассмотрения рациональные дроби с периодом ноль, кроме 0, получим также функциональное соответствие, обозначим его через  $\Psi_0^{(2)}$ .

Точки  $x, y \in E'_0$  будем считать *неразличимыми*, если  $f_0(x, y) = 0$ . Образ  $\Psi_0(z) = \{\Psi_0^{(1)}(z), \Psi_0^{(2)}(z)\}$ ,  $z \in \mathbb{R}$  состоит вообще говоря из двух различных относительно метрики  $\rho$  точек, но относительно псевдометрики  $f_0$  эти точки неразличимы.

В дальнейшем говоря об *отображении*  $\Psi_0$ , мы будем подразумевать, что  $\Psi_0(z)$  равно одному из значений  $\Psi_0^{(1)}(z)$  или  $\Psi_0^{(2)}(z)$ .

На  $E'_0$  зададим метрику:

$$f_0(x, y) = |\Psi_0^{-1}(x) - \Psi_0^{-1}(y)|, \quad x, y \in E'_0.$$

Метрику  $f_0$  будем в дальнейшем называть *внутренней метрикой* на  $E'_0$ .

**Замечание 3.2.** На простых примерах продемонстрируем построение соответствий  $\Psi$  и  $\Psi_0$ , а также некоторые их свойства. По-прежнему будем обозначать отрезок  $[0, 1]$  через  $A_0$ , а классическое множество Кантора на отрезке  $[0, 1]$  через  $K_0$  (см. замечание 3.1). Напомним также, что  $A_0 = \bigcup_{i=0}^2 T_i(A_0)$ , где  $T_i(x) = \frac{1}{3}x + \frac{i}{3}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Объединение  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  (см. замечание 3.1, соотношение (52)) является множеством всех действительных неотрицательных чисел. Определим преобразование  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $S(x) = -x$ , для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим произвольное  $x \in [0, 1]$ . Значение  $x$  представим в виде  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i / 3^i$ , где  $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$ . Из определения  $\Psi$  следует, что  $\Psi(x) = \Phi_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . В соответствии с теоремой 2.1 имеем равенство  $\Psi(x) = \alpha_1/3 + \Phi_0(\alpha_2, \alpha_3, \dots)/3$ , применяя и далее теорему 2.1, получаем, что  $\Psi(x) = x$ . Используя тот факт, что  $\Phi_j(0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) = \Phi_{j-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ,  $j \geq 1$  (см. предложение 2.2), а также определение  $\Psi$ , мы и для произвольного  $x \geq 0$  выводим равенство  $\Psi(x) = x$ . Пусть теперь  $x < 0$ , тогда  $\Psi(x) = S \circ \Psi(-x) = x$ , т. е.  $\Psi$  представляет собой тождественное преобразование числовой прямой.

Далее, напомним, что  $K_0 = T_0(K_0) \cup T_2(K_0)$  (см. (55)). Положим  $E_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$  (см. замечание 3.1, соотношение (54)). Тогда  $E'_0 = E_0 \cup S(E_0)$  (см. (56)). Снова рассмотрим произвольное  $x \in [0, 1)$ . Значение  $x$  представим в виде  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i/2^i$ , где  $\alpha_i \in \{0, 1\}$ , при этом для начала предположим, что  $x$  имеет однозначное двоичное представление. Опять же в соответствии с теоремой 2.1 имеем равенство  $\Psi_0(x) = 2\alpha_1/3 + \Phi_0(\alpha_2, \alpha_3, \dots)/3$ . В итоге получаем, что  $\Psi_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2\alpha_i/3^i$ . Пусть теперь  $x$  имеет двойственное двоичное представление:  $x = \sum_{i=1}^l \alpha_i/2^i + 1/2^{l+1} = \sum_{i=1}^l \alpha_i/2^i + \sum_{i=l+2}^{\infty} 1/2^i$ ,  $l \geq 0$ , тогда снова, используя теорему 2.1, получаем, что  $\Psi_0(x) = \{\sum_{i=1}^l 2\alpha_i/3^i + 2/3^{l+1}, \sum_{i=1}^l 2\alpha_i/3^i + \sum_{i=l+2}^{\infty} 2/3^i\}$ . Отметим, что  $\Psi_0^{-1} : K_0 \rightarrow [0, 1]$  представляет собой *классическую канторову лестницу*. Далее, распространяя  $\Psi_0$  на всю числовую прямую (аналогично тому как мы это делали выше в случае  $\Psi$ ), получаем соответствие  $\Psi_0 : \mathbb{R} \rightarrow E'_0$ , отметим, что это соответствие не является функциональным.

Определим следующую функцию  $\varrho_0 : E' \times E' \rightarrow \mathbb{R}$ . Положим  $\varrho_0(e, f) = \text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)]))$ . Для дальнейшего изложения нам понадобится также функция  $\text{sgn}(x)$  — функция знака числа  $x \in \mathbb{R}$ , принимающая значение 1 для неотрицательных  $x$  и  $-1$  для отрицательных  $x$ .

**Предложение 3.2.** *Для любых  $e, f, g \in E'$  выполняется неравенство треугольника  $\varrho_0(e, f) \leq \varrho_0(e, g) + \varrho_0(g, f)$  при этом суще-*

ствует  $e \neq f$ , что  $\varrho_0(e, f) = 0$ . Кроме того, для любых  $v, w \in \mathbb{R}$  выполняется равенство:

$$\begin{aligned} & \varrho_0(x_0, \Psi(v + w)) \operatorname{sgn}(v + w) \\ &= \varrho_0(x_0, \Psi(v)) \operatorname{sgn}(v) + \varrho_0(\Psi(v), \Psi(v + w)) \operatorname{sgn}(w). \end{aligned} \quad (57)$$

Псевдометрика  $\varrho_0$  является естественным продолжением с  $E'_0$  на  $E'$  метрики  $f_0$ . Заметим, что размерность Хаусдорфа множества  $E'_0$  равна  $d_0 = -\ln(s + 1)/\ln r$ . Далее, сформулируем предложение.

**Предложение 3.3.** Пусть  $0 < C := \mu^{d_0}(B_0) < \infty$ , тогда для любых  $e, f \in E'$  выполняется равенство  $\mu^{d_0}(\Psi([\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) = C\varrho_0(e, f)$ .

### 3.3 Информационная модель аномальной диффузии на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой

Рассмотрим случайное блуждание  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  на действительной прямой. Значение  $S_n$  для каждого  $n$  определяется суммой:  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $S_0 = 0$ , где  $\xi_i$  — независимые одинаково распределенные действительнoзначные случайные величины.

Последовательность сумм  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  индуцирует случайное блуждание на  $E'$  и на  $E'_0$ , а именно: последовательности  $\Psi(S_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и  $\Psi_0(S_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  назовем случайным блужданием на  $E'$  и  $E'_0$  соответственно. Заметим, что  $f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|$  и

$f_0(\Psi_0(S_n), x_0) = |S_n|$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , кроме того, если в предложении 2.7 константа  $C$  равна 1, то  $f(\Psi(S_n), x_0) = \mu^d(\Psi([0, S_n]))$  и  $f_0(\Psi_0(S_n), x_0) = \mu^{d_0}(\Psi_0([0, S_n]))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, пусть также  $d = \dim(A_0)$  и  $d_0 = \dim(B_0)$ . Тогда, если  $d/d_0 \leq 2$ , то выполняются следующие неравенства

$$d_1 n^{d_0/d} \leq \langle \varrho_0^2(\Psi(S_n), x_0) \rangle \leq d_2 n^{d_0/d}, \quad (58)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$ .

Если к тому же распределение  $\xi_1$  имеет ноль своей медианой, т. е.

$\mathbf{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1/2$ , то (58) выполняется и при  $d/d_0 > 2$ .

Заметим, что  $\varrho_0(\Psi(S_n), x_0)$  в неравенстве (58) можно заменить на

$$\mu^{d_0}(\Psi([0, S_n] \cap E'_0))/C,$$

где  $C$  — константа, определенная в предложении 3.3.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом  $\langle |\xi_1|^{2d/d_0} \rangle < \infty$ . Через  $d$  и  $d_0$  мы по-прежнему будем обозначать размерности Хаусдорфа множеств  $A_0$  и  $B_0$  соответственно. Тогда выполняются следующие

неравенства

$$d_1 n^{d/d_0} \leq \langle f^2(\Psi_0(S_n), x_0) \rangle \leq d_2 n^{d/d_0}, \quad (59)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$ .

Итак, если рассматривать случайное блуждание  $\Psi(S_n)$  на  $(E'_0, f_0)$ , для этого мы рассматриваем  $\Psi(S_n)$  на пространстве  $(E', \varrho_0)$ , где  $\varrho_0$  является естественным продолжением метрики  $f_0$  с  $E'_0$  на  $E'$  (см. предложение 3.2), то мы получаем модель *субдиффузии*. Наблюдатель на пространстве  $(E'_0, f_0)$  будет отмечать «залипания» блуждающей частицы (см. замечание 3.3 о STRW-модели). Если же рассматривать случайное блуждание  $\Psi_0(S_n)$  на  $(E', f)$ , то у нас возникает модель *супердиффузии*, в этом случае «наблюдатель» на пространстве  $(E', f)$  будет отмечать «длинные полеты» блуждающей частицы между ее последовательными положениями (см. [14, стр. 818]). Мы говорим (см. введение), что  $(E'_0, f_0)$  является «легким» пространством по отношению к  $(E', f)$ , а  $(E', f)$  — «тяжелым» по отношению к  $(E'_0, f_0)$ . Заметим также, что хаусдорфова размерность пространства  $(E', f)$  равна  $d_0/d$  (см. предложение 3.1).

**Замечание 3.3.** Пусть  $\{\xi_i\}_{i \geq 1}$  — последовательность случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве. Определим случайное блуждание  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  при  $n \geq 1$ . Обратим внимание, что если случайное блуждание  $\Psi(S_{[t]})$ ,  $t \geq 0$  рассмат-

ривать в пространстве  $(E', \varrho_0)$ , то мы можем перейти к известной модели блуждания в непрерывном времени (общепринятая аббревиатура CTRW) (см. [57]). Введем обозначения:

$I := \{k_0, k_1, k_2, \dots, k_s\}$ ,  $\Delta_{+, i_1, \dots, i_r}^{lr} := T_{i_1} \dots T_{i_{r-1}} T_{i_r}(A_l)$ ,  $\Delta_{-, i_1, \dots, i_r}^{lr} := ST_{i_1} \dots T_{i_{r-1}} T_{i_r}(A_l)$  и  $\Delta := \bigcup_{r \geq 1, l \geq 0, i_1, \dots, i_{r-1} \in I, i_r \notin I} (\Delta_{+, i_1, \dots, i_r}^{lr} \cup \Delta_{-, i_1, \dots, i_r}^{lr})$ . Заметим, что  $k_0, k_1, \dots, k_s$  определяются в соотношении (55) и  $I \subset \{0, 1, \dots, m\}$ .

Для каждого элементарного исхода  $\omega$  определим последовательность пар  $(\nu_n, Z_n)$ ,  $n \geq 1$ . Положим  $\nu_1 = 1$ ,  $Z_1 = \varrho_0(\Psi(S_0), \Psi(S_{\nu_1})) \text{sgn}(S_{\nu_1})$ . Далее, если  $S_{\nu_l} \notin \Psi^{-1}(\Delta)$ , положим  $\nu_{l+1} = \nu_l + 1$  и  $Z_{l+1} = \varrho_0(\Psi(S_{\nu_{l+1}}), \Psi(S_{\nu_l})) \text{sgn}(S_{\nu_{l+1}} - S_{\nu_l})$ . Если же  $S_{\nu_l} \in \Psi^{-1}(\Delta)$ , тогда через  $\delta$  обозначим объединение тех множеств из  $\Delta_+ := \{\Delta_{+, i_1, \dots, i_r}^{lr} : r \geq 1, l \geq 0, i_1, \dots, i_{r-1} \in I, i_r \notin I\}$  и из  $\Delta_- := \{\Delta_{-, i_1, \dots, i_r}^{lr} : r \geq 1, l \geq 0, i_1, \dots, i_{r-1} \in I, i_r \notin I\}$ , которым принадлежит  $\Psi(S_{\nu_l})$  (заметим, что  $\delta$  состоит из объединения не более двух таких множеств). Если не существует  $n$  большего  $\nu_l$ , такого что  $S_n \notin \Psi^{-1}(\delta)$ , положим  $\nu_{l+1} = \nu_{l+2} = \dots = +\infty$  и  $Z_{l+1} = Z_{l+2} = \dots = 0$ , в противном случае положим  $\nu_{l+1} = \min\{n > \nu_l : S_n \notin \Psi^{-1}(\delta)\}$  и  $Z_{l+1} = \varrho_0(\Psi(S_{\nu_{l+1}}), \Psi(S_{\nu_l})) \text{sgn}(S_{\nu_{l+1}} - S_{\nu_l})$ . В итоге, получим последовательность пар  $(T_{l+1} := \nu_{l+1} - \nu_l, Z_{l+1})_{l \geq 0}$ , где первый элемент пары — время ожидания скачка, а второй — величина скачка (здесь будем считать, что  $+\infty - \infty = +\infty$  и  $\nu_0 = 0$ ). Из предложения 3.2



следует, что

$$\begin{aligned} \varrho_0(\Psi(S_{[t]}), x_0) \operatorname{sgn}(S_{[t]}) &= \varrho_0(\Psi(S_0), \Psi(S_i)) \operatorname{sgn}(S_i) \\ &+ \varrho_0(\Psi(S_i), \Psi(S_{[t]})) \operatorname{sgn}(S_{[t]} - S_i), \quad i \leq [t] \end{aligned} \quad (60)$$

Применяя соотношение (60), получаем

$$\varrho_0(\Psi(S_{[t]}), x_0) \operatorname{sgn}(S_{[t]}) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad (61)$$

где  $N(t) = \max\{n : \sum_{j=1}^n T_j \leq t\}$ . Тем самым, процесс  $\varrho_0(\Psi(S_{[t]}), x_0) \operatorname{sgn}(S_{[t]})$ ,  $t \geq 0$  представляет собой случайное блуждание в непрерывном времени, порожденное последовательностью пар  $(T_l, Z_l)_{l \geq 1}$  (см. также [18]).

**Замечание 3.4.** Рассмотрим случайное блуждание  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $S_0 = 0$ , где  $\xi_i$  — независимые одинаково распределенные радемахеровские случайные величины, т. е.  $\mathbf{P}(\xi_1 = -1) = \mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$ . Объединение  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  (см. замечание 3.1, соотношение (52)) является множеством всех действительных неотрицательных чисел, обозначим его через  $\mathbb{R}_+$ . Определим преобразование  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , положив  $S(x) = -x$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . Соответственно объединение  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup S(\mathbb{R})$  представляет собой множество точек числовой прямой. Итак, мы имеем метрическое пространство  $(\mathbb{R}, \rho)$ , где  $\rho(x, y) = |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Положим  $E_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$ , где  $K_0$  — классическое множество Кантора на отрезке  $[0, 1]$  (см. замечание 3.1, соотношение (54)). То-

гда  $E'_0 = E_0 \cup S(E_0)$ . Случайное блуждание  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  индуцирует случайные блуждания  $\Psi(S_n)$  и  $\Psi_0(S_n)$  на  $\mathbb{R}$  и  $E'_0$  соответственно. Заметим, что в нашем случае  $\Psi(S_n) = S_n$  при всех  $n = 0, 1, \dots$ . Аналогом целочисленной решетки на  $E'_0$  является множество  $\{\Psi_0(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ . Вероятность попасть из точки  $\Psi_0(n)$  в точки  $\Psi_0(n \pm 1)$  равна  $1/2$ , при этом «длины» скачков равны  $\mu^{d_0}(\Psi_0([n, n \pm 1])) = 1$ , где  $d_0 = \dim(E'_0)$  (заметим, что  $\mu^{d_0}(K_0) = 1$ ).

В метрике  $\rho$  средний квадрат расстояния от  $\Psi_0(S_n)$  до 0 «ведет себя» как  $n^{1/d_0}$  при  $n \rightarrow \infty$ . В псевдометрике  $\rho_0$  пространства  $(\mathbb{R}, \rho_0)$  средний квадрат расстояния от  $\Psi(S_n)$  до 0 «ведет себя» как  $n^{d_0}$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. теоремы 3.1 и 3.2).

### 3.4 Доказательство утверждений

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Пусть  $x, y \in A_0$ . Из определения  $\Psi$  следует, что  $\Psi^{-1}(T_i(x)) = \frac{i}{m+1} + \frac{1}{m+1}\Psi^{-1}(x)$  и  $\Psi^{-1}(T_i(y)) = \frac{i}{m+1} + \frac{1}{m+1}\Psi^{-1}(y)$ , поэтому

$$f(T_i(x), T_i(y)) = \frac{1}{m+1}f(x, y), i = 0, \dots, m, \quad (62)$$

где  $x, y \in A_0$ . Поэтому из равенства  $A_0 = \bigcup_{i=0}^m T_i(A_0)$  и из (62) с помощью теоремы 1.1 и предложения 1.2 следует, что  $\dim(A_0) = 1$ , стало быть, и  $\dim(E') = 1$ .

Из (62) следует

$$f(T_{k_i}(x), T_{k_i}(y)) = \frac{1}{m+1} f(x, y), \quad i = 0, \dots, s, \quad (63)$$

где  $x, y \in B_0$ . Следовательно, из равенства  $B_0 = \bigcup_{i=0}^s T_{k_i}(B_0)$  и из (63), применяя теорему 1.1 и предложение 1.2, получаем, что  $\dim(B_0) = \ln(s+1)/\ln(m+1)$ , поэтому и  $\dim(E'_0) = \ln(s+1)/\ln(m+1)$ .

**Лемма 3.1.** *Для каждого  $x \in \Psi^{-1}(E'_0)$  значение  $\Psi_0^{-1}(\Psi(x))$  определяется однозначно.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно рассмотреть случай когда  $\Psi(x)$  состоит из двух элементов. Один из этих элементов соответствует представлению  $x$  в виде дроби с периодом 0, а другой в виде дроби с периодом  $m$ . Напомним, что мы обозначили эти элементы через  $\Psi^{(1)}(x)$  и  $\Psi^{(2)}(x)$ . Предположив, что  $\Psi^{(1)}(x), \Psi^{(2)}(x) \in E'_0$  и воспользовавшись определением  $\Psi_0$ , получим, что  $\Psi_0^{-1}(\Psi^{(1)}(x))$  и  $\Psi_0^{-1}(\Psi^{(2)}(x))$  являются одним и тем же действительным числом, причем  $\Psi_0^{-1}(\Psi^{(1)}(x))$  и  $\Psi_0^{-1}(\Psi^{(2)}(x))$  являются представлением этого числа в виде  $(s+1)$ -ичной дроби с периодом 0 и  $s$  соответственно.

**Лемма 3.2.** *Множество  $\Psi^{-1}(E'_0)$  является замкнутым в пространстве  $(\mathbb{R}, \lambda)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего покажем, что множество  $V := \Psi(\Psi^{-1}(E'_0))$  является замкнутым подмножеством в  $(E', f)$  (заметим,

что  $E'_0 \subseteq V$ ). Предположим, что это не так, тогда существует точка  $x \in \text{cl}(V)$ , где  $\text{cl}(V)$  — замыкание множества  $V$ , и  $x \notin V$ , а также существует последовательность  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq E'_0$ , такая что  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$  (относительно метрики  $f$ ). Из сходимости следует, что последовательность  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  — ограниченная, т. е. существует положительная константа  $C$ , что  $|\Psi^{-1}(x_n)| \leq C$  для всех  $n \geq 1$ . В силу определения  $\Psi$ , существует  $j \geq 0$ , такое что  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq A_j \cup S(A_j)$  (см. определение множества  $E'$ ). Заметим, что множество  $A_j \cup S(A_j)$  является компактом в пространстве  $(X, \rho)$ , но тогда из последовательности  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  можно извлечь сходящуюся относительно метрики  $\rho$  подпоследовательность  $x_{n_k}$ . Далее, в силу замкнутости  $E'_0$  в  $(X, \rho)$  выполняется соотношение:  $x_{n_k} \rightarrow y \in E'_0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Используя непрерывность  $\Psi^{-1} : (E', \rho) \rightarrow (\mathbb{R}, \lambda)$  (см. предложение 2.3), получаем, что  $\Psi^{-1}(x_{n_k}) \rightarrow \Psi^{-1}(y)$ , сравнивая это с тем, что  $x_n \rightarrow x$  (относительно  $f$ ), выводим равенство  $\Psi^{-1}(y) = \Psi^{-1}(x)$ . Следовательно,  $x \in V$ . Получили противоречие. Итак,  $V$  является замкнутым подмножеством в  $(E', f)$ .

Далее, отметим, что отображение  $\Psi : (\mathbb{R}, \lambda) \rightarrow (E', f)$  является непрерывным (см. предложение 2.6), отсюда следует, что  $\Psi^{-1}(V) = \Psi^{-1}(E'_0)$  является замкнутым. Лемма доказана.

**Лемма 3.3.** *Для любых  $e, f \in E'$ , таких что*

$$[\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)] \cap \Psi^{-1}(E'_0) \neq \emptyset$$

имеет место равенство

$$\varrho_0(e, f) = f_0(\Psi(b), \Psi(a)),$$

где  $a = \inf\{x : x \in [\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$  и  $b = \sup\{x : x \in [\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$ , в частности, если  $e, f \in E'_0$ , то  $\varrho_0(e, f) = f_0(e, f)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.2 следует, что  $a$  и  $b$  — такие действительные числа, что  $\Psi(a) \cap E'_0 \neq \emptyset$ ,  $\Psi(b) \cap E'_0 \neq \emptyset$ , то из леммы 3.1 следует, что  $\Psi_0^{-1}(\Psi(a))$  и  $\Psi_0^{-1}(\Psi(b))$  определяются однозначно. Далее, из определения  $\varrho_0$  получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2. Рассмотрим произвольные действительные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , такие что  $a < b < c$  и  $[a, b] \cap \Psi^{-1}(E'_0) \neq \emptyset$ ,  $[b, c] \cap \Psi^{-1}(E'_0) \neq \emptyset$ .

Обозначим  $a_1 := \inf\{x : x \in [a, b] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$ ,  $b_1 := \sup\{x : x \in [a, b] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$ ,  $b'_1 := \inf\{x : x \in [b, c] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$ ,  $c_1 := \sup\{x : x \in [b, c] \cap \Psi^{-1}(E'_0)\}$ . Заметим, что в силу построения  $\Psi_0$  выполняются неравенства  $\Psi_0^{-1}(\Psi(a_1)) \leq \Psi_0^{-1}(\Psi(b_1)) \leq \Psi_0^{-1}(\Psi(b'_1)) \leq \Psi_0^{-1}(\Psi(c_1))$ .

Тогда  $\text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([a, c])) = \Psi_0^{-1}(\Psi(c_1)) - \Psi_0^{-1}(\Psi(a_1))$ ,  $\text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([a, b])) = \Psi_0^{-1}(\Psi(b_1)) - \Psi_0^{-1}(\Psi(a_1))$  и  $\text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([b, c])) = \Psi_0^{-1}(\Psi(c_1)) - \Psi_0^{-1}(\Psi(b'_1))$  (см. лемму 3.3). Обратим внимание, что опять же в силу построения  $\Psi_0$  имеет место равенство  $\Psi_0^{-1}(\Psi(b'_1)) =$

$\Psi_0^{-1}(\Psi(b_1))$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([a, c])) &= \text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([a, b])) \\ &+ \text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([b, c])), \end{aligned} \quad (64)$$

откуда и следует неравенство треугольника. Заметим, что неравенство (64) сохраняется и в случае  $[a, b] \cap \Psi^{-1}(E'_0) = \emptyset$  при этом  $\text{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([a, b])) = 0$ . Из (64) сразу следует и соотношение (57), определенное в утверждении предложения 3.2.

Далее покажем, что  $\varrho_0$  является псевдометрикой. Рассмотрим  $1 \leq i \leq m$ , такое что  $i \notin \{k_1, \dots, k_n\}$ . В этом случае для любых  $e, f \in T_i(A_0)$  выполняется равенство  $\varrho_0(e, f) = 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. В силу определения  $\varrho_0$  и  $\mu^{d_0}$ , также леммы 3.3 утверждение достаточно доказать для  $e, f \in E'_0$ .

Прежде всего будем считать, что  $0 < \Psi^{-1}(e) < \Psi^{-1}(f)$  (сразу отметим, что остальные случаи рассматриваются аналогично). Заметим, что

$$\begin{aligned} \mu^{d_0}(\Psi([\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) \\ = \mu^{d_0}(\Psi([0, \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) - \mu^{d_0}(\Psi([0, \Psi^{-1}(e)]) \cap E'_0). \end{aligned} \quad (65)$$

Определим множества:

$$\begin{aligned} D_{m+1} &= \Psi(\{w : w \text{ имеет двойственное } m+1\text{-ичное представление}\}) \\ \text{и } D_{s+1} &= \Psi_0(\{w : w \text{ имеет двойственное } s+1\text{-ичное представление}\}) \end{aligned}$$

ичное представление}). Пусть  $x \in \Psi((0, \Psi^{-1}(f))) \cap E'_0 \setminus (D_{m+1} \cup D_{s+1})$ . В силу построения  $\Psi_0$  получаем, что  $\Psi_0^{-1}(x) \in [0, \Psi_0^{-1}(f)]$ . Действительно, рассмотрим  $m+1$ -ичное представление для  $\Psi^{-1}(f)$ :  $\Psi^{-1}(f) = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_k}, r_{\alpha_{k+1}} r_{\alpha_{k+2}} \dots$  (здесь « $\cdot$ » является  $m+1$ -ичным разделителем). Кроме того, пусть  $\Psi^{-1}(x) = r_{\beta_1} \dots r_{\beta_k}, r_{\beta_{k+1}} r_{\beta_{k+2}} \dots$

Существует  $l \geq 1$ , такой что  $\alpha_l < \beta_l$  и  $\alpha_i = \beta_i$  при всех  $i = 1, \dots, l-1$ , откуда следует что  $\Psi_0^{-1}(x) < \Psi_0^{-1}(f)$ . Стало быть,  $x \in \Psi_0([0, \Psi_0^{-1}(f)])$ . Следовательно, выполняется неравенство  $\mu^{d_0}(\Psi([0, \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) \leq \mu^{d_0}(\Psi_0([0, \Psi_0^{-1}(f)]))$ .

Далее, пусть  $x \in \Psi_0((0, \Psi_0^{-1}(f))) \setminus (D_{m+1} \cup D_{s+1})$ . Используя определение  $\Psi$ , выводим соотношение:  $\Psi^{-1}(x) \in [0, \Psi^{-1}(f)]$  и, следовательно,  $x \in \Psi([0, \Psi^{-1}(f)])$ . Поэтому выполняется неравенство  $\mu^{d_0}(\Psi([0, \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) \geq \mu^{d_0}(\Psi_0([0, \Psi_0^{-1}(f)]))$ . В итоге мы имеем равенство

$$\mu^{d_0}(\Psi([0, \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) = \mu^{d_0}(\Psi_0([0, \Psi_0^{-1}(f)])). \quad (66)$$

Из предложения 2.7 и (66) следует, что  $\mu^{d_0}(\Psi_0([0, \Psi_0^{-1}(f)])) = C\Psi_0^{-1}(f)$ . Используя (65) получаем, что  $\mu^{d_0}(\Psi([\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)]) \cap E'_0) = \varrho_0(e, f)$ .

Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Для отличного от нуля  $|S_n|$  найдется целое  $k$ , такое что  $(m+1)^{k-1} \leq |S_n| < (m+1)^k$ . Рассмотрим

случайное блуждание  $\Psi(S_n)$  на  $E'$ . Выполняются неравенство:

$$\begin{aligned} \text{diam}\Psi_0^{-1}(\Psi([0, (m+1)^{k-1}])) &\leq \varrho_0(\Psi(S_n), x_0) \\ &\leq \text{diam}\Psi_0^{-1}(\Psi([0, (m+1)^k])). \end{aligned} \quad (67)$$

Далее, заметим, что непосредственно из определения  $\Psi$ , а также предложения 2.2 следует, что для любого целого  $k$  имеют место включения:

$$\Psi([0, (m+1)^k]) \subseteq T_0^{-k}(A_0)$$

и

$$\Psi([0, (m+1)^k]) \supseteq T_0^{-k}(A_0).$$

Заметим, что

$$T_0^{-k}(A_0) \cap E'_0 = T_0^{-k}(B_0)$$

и

$$\text{diam}\Psi_0^{-1}(T_0^{-k}(B_0)) = (s+1)^k.$$

Итак, из (67) получаем неравенства:

$$(s+1)^{k-1} \leq \varrho_0(\Psi(S_n), x_0) \leq (s+1)^k. \quad (68)$$

Используя неравенства:

$$\frac{\ln |S_n|}{\ln(m+1)} < k \leq 1 + \frac{\ln |S_n|}{\ln(m+1)},$$



а также (68), получаем

$$\frac{1}{s+1} |S_n|^{\ln(s+1)/\ln(m+1)} \leq \varrho_0(\Psi(S_n), x_0) \leq s |S_n|^{\ln(s+1)/\ln(m+1)}. \quad (69)$$

Стало быть, из (69) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)^2} \langle |S_n|^{2\ln(s+1)/\ln(m+1)} \rangle &\leq \langle \varrho_0^2(\Psi(S_n), x_0) \rangle \\ &\leq (s+1)^2 \langle |S_n|^{2\ln(s+1)/\ln(m+1)} \rangle. \end{aligned} \quad (70)$$

Откуда, применяя лемму 2.17 к левой и правой части неравенства (70), получаем утверждение теоремы.

**Лемма 3.4.** *Для любого целого  $k$  выполняются равенства:*

$$\min\{\Psi^{-1}(\Psi_0((s+1)^k))\} = \frac{k_s}{m}(m+1)^k$$

*и*

$$\max\{\Psi^{-1}(\Psi_0((s+1)^k))\} = k_1(m+1)^k.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим случай, когда  $k < 0$ . В этом случае  $\Psi_0((s+1)^k) = \{\Phi_0(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \Phi_0(0, \dots, 0, 0, s, \dots, s, \dots)\}$  при этом  $\Phi_0$  определяется преобразованиями  $T_0, T_{k_1}, \dots, T_{k_s}$ , т. е.  $\Phi_0(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots) = T_0^{-k-1} \circ T_{k_1} \circ \Phi_0(0, \dots, 0, \dots)$  и  $\Phi_0(0, \dots, 0, 0, s, \dots, s, \dots) = T_0^{-k} \circ T_{k_s} \circ \Phi_0(s, \dots, s, \dots)$  (см. теорему 2.1). Но это означает, что  $\Psi^{-1}(\Psi_0((s+1)^k)) = \{k_1(m+1)^k, k_s \left( \sum_{i=-\infty}^{k-1} (m+1)^i \right)\}$ , откуда и следует утверждение леммы в случае  $k < 0$ . Аналогично рассматривается случай  $k \geq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Для положительного  $|S_n|$  найдется целое  $k$ , такое что  $(s+1)^{k-1} \leq |S_n| < (s+1)^k$ . Рассмотрим случайное блуждание  $\Psi_0(S_n)$  на  $E'_0$ . Имеем равенство  $f(\Psi_0(S_n), x_0) = |\Psi^{-1}(\Psi_0(S_n))|$ . Прежде всего отметим, что имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} & \min\{|\Psi^{-1}(\Psi_0((s+1)^{k-1}))|\} \\ & \leq |\Psi^{-1}(\Psi_0(S_n))| \leq \max\{|\Psi^{-1}(\Psi_0((s+1)^k))|\}. \end{aligned}$$

Из леммы 3.4 вытекают неравенства:

$$\frac{k_s}{m}(m+1)^{k-1} \leq |\Psi^{-1}(\Psi_0(S_n))| \leq k_1(m+1)^k. \quad (71)$$

Далее, используя неравенства:  $\frac{\ln|S_n|}{\ln(s+1)} \leq k \leq 1 + \frac{\ln|S_n|}{\ln(s+1)}$ , из (71) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{k_s}{m(m+1)}|S_n|^{\ln(m+1)/\ln(s+1)} \\ & \leq |\Psi^{-1}(\Psi_0(S_n))| \leq k_1(m+1)|S_n|^{\ln(m+1)/\ln(s+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{k_s^2}{m^2(m+1)^2}|S_n|^{2\ln(m+1)/\ln(s+1)} \leq \langle f^2(\Psi_0(S_n), x_0) \rangle \\ & \leq k_1^2(m+1)^2|S_n|^{2\ln(m+1)/\ln(s+1)}. \end{aligned} \quad (72)$$

Применяя лемму 2.17 к левой и правой части неравенства (72), получаем утверждение теоремы.

### 3.5 Результаты главы 3

Основным результатом третьей главы являются теоремы 3.1 и 3.2. Эти теоремы устанавливают оценки на вторые моменты расстояния от блуждающей по самоподобным множествам частицы до начальной точки. Нелинейность этих оценок объясняется переходом к неэквивалентной по отношению к топологии исходного фазового пространства топологии наблюдателя и, тем самым, объясняет происхождение типа аномальной диффузии (суб- или супердиффузии). В следующей главе взаимодействие диффундирующих частиц с внешней средой будет моделируется именно с помощью преобразований евклидовой метрической топологии в неэквивалентные ей топологии.

## ГЛАВА 4

### Динамика формирования процессов аномальной диффузии

#### 4.1 Введение

В четвертой главе рассматриваются модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой из главы 3. Представленные модели реализуются как случайное блуждание в евклидовом пространстве относительно метрических топологий, не эквивалентных евклидовой метрической топологии. Оценки для среднего квадрата перемещения  $r(t)$  блуждающей частицы имеют вид:

$$\frac{\langle r^2(t) \rangle}{t^\alpha} = O(1) \text{ и } \frac{t^\alpha}{\langle r^2(t) \rangle} = O(1), \quad t \rightarrow +\infty,$$

где  $\alpha$  — константа из диапазона  $(0, 2)$ . «Длинные полеты» частиц и «временные задержки», порождаемые пространственно-временными нелокальностями, мы связываем с сингулярными зонами следующим образом. В случае супердиффузии, когда  $\alpha > 1$ , сингулярная зона — это континуум нулевой лебеговой меры в евклидовом пространстве, на котором в каждый момент дискретного времени фиксируется положение блуждающей частицы, при этом «длинные полеты» связаны именно с блужданием по разреженному множеству (типа канторовой пыли) и скачками этого блуждания

ненулевой длины в каждый момент дискретного времени. В случае субдиффузии, когда  $\alpha < 1$ , сингулярная зона — это счетное всюду плотное множество «ловушек» в евклидовом пространстве, т. е. множество точек в каждой из которых частица находится в течение ненулевого, вообще говоря, случайного времени. Заметим, что в случае  $\alpha = 1$  упомянутое случайное блуждание вырождается в классическое случайное блуждание в евклидовом пространстве (под классическим блужданием понимается блуждание с независимыми и одинаково распределенными скачками и конечными вторыми моментами).

Далее, сделаем замечание о введении топологий, неэквивалентных метрической топологии евклидова пространства. В сингулярных зонах сохраняется свойство самоподобия на всей пространственно-временной протяженности, поэтому естественно использовать «лестницу Кантора в целом» для определения метрик, порождающих неэквивалентную топологию. Так, если  $C : X \rightarrow Y$  — канторова лестница, то классическое блуждание на  $X$  отображается в процесс субдиффузии на  $Y$ , а прообразом классического блуждания на  $Y$  является процесс супердиффузии на  $X$ . Предложенное автором свойство отображения  $C : X \rightarrow Y$  позволяет говорить, что модели суб- и супердиффузии, построенные в [71], можно рассматривать как деформации классического блуждания с помощью преобразований евклидовой топологии относительно канторовой лестницы

и обратного к ней отображения.

В работе [72] автором получен закон обмена энергией и импульсом между двумя классами стационарных процессов. Целью настоящей главы является построение динамической интерпретации деформации классической диффузии в аномальную, основанной на динамических соотношениях для стационарных процессов.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению заметим, что в классической теории броуновского движения исключается факт внешнего влияния на процесс диффузии со стороны другой среды, сопровождающийся обменом энергией. Как следствие, класс случайных процессов, моделирующих блуждание частиц диффундирующей среды и учитывающих взаимодействие с внешней средой, является классом немарковских процессов. В настоящей главе взаимодействие диффундирующих частиц с внешней средой моделируется с помощью преобразований евклидовой метрической топологии в неэквивалентные ей топологии, что приводит к классу процессов, являющихся деформацией процесса классической диффузии.

Отметим, что процесс супердиффузии реализуется с помощью топологии, относительно которой непрерывный континуум становится сингулярным (типа множества Кантора). В свою очередь процессу субдиффузии соответствует топология, относительно которой, наоборот, сингулярный континуум преобразуется в непрерывный. Ключевым моментом здесь являются упомянутые топологии, кото-

рые, во-первых, в случае отсутствия сингулярных зон совпадают с метрической топологией евклидова пространства и, во-вторых, относительно этих топологий можно рассмотреть не только процесс случайного блуждания, но и другие случайные процессы. В качестве таких процессов мы рассмотрим стационарные процессы. Во-первых, стационарные процессы являются в определенном смысле колебательными процессами, для которых можно определить понятие энергии и плотности энергии (см, например, [32]), во-вторых, для континуума (непрерывного или сингулярного) можно определить стационарный процесс таким образом, что почти все его траектории будут всюду плотны на этом континууме, в дальнейшем будем употреблять термин «стационарный процесс, сосредоточенный на континууме». Такое «нагружение» континуума стационарным процессом позволяет моделировать его энергетическое состояние и, кроме того, установить закон изменения этого состояния при преобразовании континуума из непрерывного в сингулярный. Отметим, что энергия стационарного процесса определяется как второй момент этого процесса (с точностью до размерностного коэффициента пропорциональности), при этом спектральная плотность (с точностью до размерностного коэффициента пропорциональности) показывает распределение этой энергии по частотам.

Итак, для того чтобы найти энергетические характеристики обозначенной выше деформации процесса диффузии в процесс ано-

мальной диффузии, мы рассматриваем стационарные процессы, сосредоточенные на непрерывном и сингулярном континууме. В качестве динамической модели деформации классического блуждания в процесс аномальной диффузии мы предлагаем динамическую модель деформации стационарных процессов.

Приведем краткое содержание разделов настоящей главы. В разделе 4.2 теоремы 4.1 и 4.2 устанавливают степенные оценки на вторые моменты расстояния от блуждающей по числовой прямой частицы до начальной точки, причем расстояние вычисляется в метриках, неэквивалентных метрике евклидова пространства.

В разделе 4.3 сингулярные зоны наделяются энергией стационарных процессов сдвига и в теореме 4.3 устанавливается, что плотности энергий таких стационарных процессов связаны между собой дробно-линейным соотношением. Следствием этой теоремы является тождество (90), которое можно назвать уравнением динамики, связывающим плотности энергий процессов типа (83) и (91). Стационарные процессы типа (83) реализуют энергетические состояния диффундирующих частиц, а процессы типа (91) реализуют энергетические состояния внешней среды. Реализация процессов указанных двух типов в форме квазичастиц в гиперболической геометрии позволяет придать уравнению динамики (90) геометрический вид (92), представляющий аналог уравнения динамики, описывающего эффект Комптона (см., например, [9]).



В разделе 4.4 моделируется формирование режимов супердиффузии и субдиффузии из процесса классической диффузии за счет обмена энергией и импульсом между диффундирующими частицами и внешней средой.

Доказательство основных математических утверждений вынесено в отдельный раздел 4.5, чтобы не усложнять картину формирования математической модели.

Раздел 4.6 представляет собой заключение.

Основные результаты четвертой главы опубликованы в [72], [76].

## 4.2 Геометрическая структура сингулярных зон в модели суб- и супердиффузии

Множество Кантора  $K_q$ ,  $q > 2$  определяется как множество всех чисел вида  $\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i q^i$ , где каждый коэффициент  $a_i$  равен либо 0, либо  $q-1$ . Множество  $K_3$  — классическое канторово множество, множество же  $K_2$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Размерность Хаусдорфа множества  $K_q$  равна  $d_q = \ln 2 / \ln q$  (см., например, [44]).

Каждому множеству  $K_q$ ,  $2 < q < \infty$  соответствует непрерывная, неубывающая на отрезке  $[0, 1]$  функция  $C_q$ , называемая канторовой лестницей. Напомним, что для любого  $z = \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i q^i \in K_q$  (каждый  $b_i$  равен либо 0, либо  $q-1$ ) значение  $C_q(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i 2^i$ , где  $a_i = b_i / (q-1)$ .

Отметим, что в качестве поточечного предела получается функ-

ция  $C_2$ , а именно:  $C_2(t) = t$  для всех  $t \in [0, 1]$ , при этом  $K_2 = [0, 1]$ .

Для  $C_q(t)$ ,  $2 \leq q < \infty$  выполняется следующее известное свойство  $d_q$ -однородности (масштабной инвариантности) (см., например, [44])

$$C_q(t)/q^{d_q} = C_q(t/q) \quad (73)$$

при всех  $t \in [0, 1]$ .

Сохраняя свойство (73), продолжим  $C_q(t)$  на всю положительную полуось, для этого положим  $C_q(t) = 2^{n+1}C_q(t/q^{n+1})$  для каждого  $t \in [q^n, q^{n+1}]$ ,  $n \geq 0$ . Продолженная таким образом функция  $C_q$  обладает свойством

$$C_q(q^n t) = q^{nd_q} C_q(t) \quad (74)$$

при всех  $t \geq 0$  и целых  $n$ . Положим также  $C_q(t) = -C_q(-t)$  для любого  $t < 0$ .

Рассмотрим множество  $K = \bigcup_{j=0}^{+\infty} q^j \cdot K_q$ . Положим

$$K^e = -K \cup K. \quad (75)$$

Отметим, что  $C_q(K^e) = \mathbb{R}$ .

Для любого  $x \geq 0$  определим соответствие  $\mathcal{D}_q$ :  $\mathcal{D}_q(x) = C_q^{-1}(x) \cap K$ . Заметим, что  $\mathcal{D}_q([0, +\infty)) = K$ . Преобразуем соответствие  $\mathcal{D}_q$  в функциональное соответствие  $D_q$ . Если  $x$  имеет представление в виде двоичной рациональной дроби с периодом 0, то  $\mathcal{D}_q(x)$  состоит ровно из двух элементов, в этом случае в качестве образа  $D_q(x)$  выберем

любое из этих значений. Для  $x < 0$  положим  $D_q(x) = -D_q(-x)$ , при этом  $D_q(\mathbb{R}) \subset K^e$ .

Определим псевдометрику  $\rho_q(x, y) = |C_q(x) - C_q(y)|$  и метрику  $\varrho_q(x, y) = |D_q(x) - D_q(y)|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Заметим, что топологическое пространство  $(K^e, \rho_q)$  является связным. Через  $\lambda(x, y) = |x - y|$  обозначим естественную метрику множества  $\mathbb{R}$ .

Пусть  $y$  имеет представление в виде двоичной рациональной дроби с периодом 0, в этом случае  $C_q^{-1}(y) = [x_1, x_2]$ , где  $x_1 \neq x_2$ . Поэтому, выполняется равенство  $\rho_q(x_1, x_2) = 0$ . Стало быть, псевдометрика  $\rho_q$  «не различает» точки на интервалах числовой оси, соответствующие в определенном выше смысле рациональным дробям с периодом 0. Упомянутые интервалы естественно называть зонами безразличия относительно метрики  $\rho_q$ . В следующей теореме устанавливается, что из-за наличия зон безразличия случайное блуждание с диффузионным режимом переноса относительно псевдометрики  $\rho_q$  будет иметь субдиффузионный характер.

Рассмотрим случайное блуждание  $S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  на действительной прямой. Значение  $S_n$  для каждого  $n$  определяется суммой:  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $S_0 = 0$ , где  $\xi_i$  — независимые одинаково распределенные действительнoзначные случайные величины.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда, если  $d_q \geq 1/2$ , то выполняются сле-

дующие неравенства

$$c_1 n^{d_q} \leq \langle \rho_q^2(S_n, 0) \rangle \leq c_2 n^{d_q}, \quad (76)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$  и константы  $d_q = \ln 2 / \ln q$ .

Если к тому же распределение  $\xi_1$  имеет ноль своей медианой, т. е.

$$\mathbf{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1/2, \text{ то (76) выполняется и при } d_q < 1/2.$$

Из теоремы 4.1 следует, что блуждание  $(C_q(S_n))_{n \geq 0}$  относительно стандартной метрики  $\lambda$  имеет субдиффузионный режим переноса, при этом эффект «залипания» моделируется попаданием  $S_n$  в зоны безразличия относительно метрики  $\rho_q$ . Множеством «ловушек» для блуждания  $(C_q(S_n))_{n \geq 0}$  является все множество рациональных точек с периодом 0, отметим, что такое множество является *сингулярной зоной* этого блуждания (см. введение).

Переходя к следующему утверждению, отметим, что  $\varrho_q(x, 0) \geq (\lambda(x, 0))^{1/d_q}$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  (см. лемму 4.2 в разделе 4.5), т. е. метрика  $\varrho$  учитывает «протяженности», не учитываемые метрикой  $\lambda$ . Поэтому (как это устанавливается в следующей теореме) блуждание, имеющее диффузионный режим, относительно метрики  $\varrho_q$  будет иметь супердиффузионный режим.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots, n\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и еди-

ничными дисперсиями, при этом  $\langle |\xi_1|^{2/d_q} \rangle < \infty$ . Тогда выполняются следующие неравенства

$$c_1 n^{1/d_q} \leq \langle \varrho_q^2(S_n, 0) \rangle \leq c_2 n^{1/d_q}, \quad (77)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — положительные константы, зависящие от распределения  $\xi_1$  и константы  $d_q$ .

Заметим, что  $(D_q(S_n))_{n=0,1,\dots} \subseteq K^e$ , кроме того, выполняется равенство

$$\rho_q(D_q(S_n), 0) = |S_n|.$$

Поэтому относительно метрики  $\rho_q$  блуждание  $(D_q(S_n))$  имеет обычный диффузионный характер, при этом пространство  $(K^e, \rho_q)$  является связным.

Подводя итог, отметим, что случайное блуждание  $(D_q(S_n))_{n=0,1,\dots}$  относительно метрики  $\rho_q$  представляет собой блуждание  $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ , которое относительно метрики  $\lambda$  идет по диффузионному типу. В свою очередь блуждание  $(S_n)_{n=0,1,\dots}$  относительно метрики  $\varrho_q$  имеет супердиффузионный режим и относительно метрики  $\rho_q$  — субдиффузионный.

Заметим, что относительно «линеек»  $\rho_q$  и  $\varrho_q$  процесс блуждания  $(S_n)$  (относительно метрики  $\lambda$ ) преобразуется в новые процессы:

$$C_q(S_n) = \rho_q(S_n, 0) \operatorname{sign}(S_n) \text{ п. н.} \quad (78)$$

и

$$D_q(S_n) = \varrho_q(S_n, 0) \operatorname{sign}(S_n) \text{ п. н.}, \quad (79)$$

здесь  $\operatorname{sign}$  — функция знака числа, аббревиатура «п. н.» означает «почти наверное».

Теоремы 4.1 и 4.2 легко обобщаются на многомерный случай.

Определим псевдометрику и метрики в пространстве  $\mathbb{R}^k$ :

$$\begin{aligned} \rho_{k,q}(x, y) &= \sqrt{\sum_{j=1}^k \rho_q^2(x_j, y_j)}, \quad \varrho_{k,q}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varrho_q^2(x_j, y_j)} \text{ и} \\ \lambda_k(x, y) &= \sqrt{\sum_{j=1}^k \lambda^2(x_j, y_j)}, \text{ где } x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad y = \\ &(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что схема серий случайных величин  $(\xi_i^{(j)})$  удовлетворяет условию (S):

(S): Для каждого  $j = 1, \dots, k$  последовательность  $\{\xi_i^{(j)}, i = 1, 2, \dots, n\}$  является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, при этом для разных  $j$  соответствующие последовательности независимы друг от друга.

Определим  $S_n^{(j)}$  для каждого  $n$  и  $j$  следующим образом:  $S_n^{(j)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(j)}$ ,  $S_0^{(j)} = 0$ . Обозначим  $\mathbf{S}_n = (S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(k)})$ .

**Следствие 4.1.** Пусть  $d_q \geq 1/2$ , тогда выполняются следующие неравенства

$$c_{1k} n^{d_q} \leq \langle \rho_{k,q}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \leq c_{2k} n^{d_q}, \quad (80)$$

где  $c_{1k}$  и  $c_{2k}$  — положительные константы, зависящие от распределения набора случайных величин  $(\xi_1^{(j)})_{j=1,\dots,k}$  и  $d_q$ . Если к тому же распределение  $\xi_1^{(j)}$  при каждом  $j = 1, \dots, k$  имеет ноль своей медианой, то (80) выполняется и при  $d_q < 1/2$ .

**Следствие 4.2.** Пусть  $\langle |\xi_1^{(j)}|^{2/d_q} \rangle < \infty$  при всех  $j = 1, \dots, k$ . Тогда выполняются следующие неравенства

$$c_{1k}n^{1/d_q} \leq \langle \varrho_{k,q}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \leq c_{2k}n^{1/d_q}, \quad (81)$$

где  $c_{1k}$  и  $c_{2k}$  — положительные константы, зависящие от распределения набора случайных величин  $(\xi_1^{(j)})_{j=1,\dots,k}$  и  $d_q$ .

Введем в рассмотрение следующее условие.

(R): Имеет место условие (S) и случайные величины  $\xi_i^{(j)}$  при всех  $i, j$  — радемахеровские, т. е.  $\mathbf{P}(\xi_i^{(j)} = -1) = \mathbf{P}(\xi_i^{(j)} = 1) = 1/2$ .

Отметим, что если имеет место условие (R), то, очевидно, выполняются условия следствий (4.1) и (4.2). Далее, заметим, что если  $\rho_{k,q}(\mathbf{S}_n, 0) = 0$  ( $\varrho_{k,q}(\mathbf{S}_n, 0) = 0$ ) п. н., то  $\mathbf{S}_n = 0$  п. н. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho_{k,q}(\mathbf{S}_{2n}, 0) = 0) &= \mathbf{P}(\varrho_{k,q}(\mathbf{S}_{2n}, 0) = 0) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{S}_{2n} = 0) \sim cn^{-k/2}, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (82)$$

где  $c$  — положительная константа.

### 4.3 Стационарные процессы и квазичастицы

В этой части работы сингулярные зоны появляются как носители меры изменения энергии и импульса стационарных процессов сдвига. При этом процессы сдвига реализуются квазичастицами в гиперболической геометрии.

Определим последовательность  $(Z_n^{(\alpha)})$

$$Z_n^{(\alpha)} = d\sqrt{2\pi\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{n+j}, \quad (83)$$

где  $d > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ , последовательность  $(\varepsilon_n)$  является *белым шумом* (т. е. последовательностью некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией).

В дальнейшем последовательность  $(Z_n^{(\alpha)})$  будем называть стационарным процессом сдвига (см., например, [15]).

В разделе 4 мы будем рассматривать последовательность  $(\varepsilon_n)$ , такую что  $\mathbf{P}(\varepsilon_0 = -1) = \mathbf{P}(\varepsilon_0 = 1) = 1/2$ . В этом случае почти для каждого  $\omega$  (относительно меры  $\mathbf{P}$ ) последовательность

$$(Z_n^{(\alpha)}(\omega)) \quad (84)$$

является всюду плотной на континууме  $A(\alpha) \cdot S_\alpha$ , где  $0 < \alpha \leq 1/2$ ,  $S_\alpha = K_{1/\alpha} - 1/2$  и  $A(\alpha) = d \cdot \frac{2\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha}$  (см. [72]), будем говорить, что случайный процесс  $(Z_n^{(\alpha)})$  сосредоточен на континууме  $A(\alpha) \cdot S_\alpha$ . Стационарный случайный процесс  $(Z_n^{(\alpha)})$  будем интерпретировать



как *колебание континуума*  $A(\alpha) \cdot S_\alpha$ . В частности, процесс

$$(Z_n^{(\alpha)} + A(\alpha)/2) \quad (85)$$

является *колебанием континуума*  $A(\alpha) \cdot K_{1/\alpha}$ .

Приведем следующий общий результат. Пусть  $(X_n)$  — стационарная последовательность случайных величин с нулевым средним. Напомним, что найдется такая конечная мера  $G = G(\Delta)$  на  $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]))$ , где  $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$  — борелевская  $\sigma$ -сигма алгебра на  $[-\pi, \pi]$ , что ковариационная функция  $R(n) = \langle X_0, X_n \rangle$  допускает спектральное представление (см., например, [15])

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} G(d\lambda).$$

Плотность меры  $G$ , если таковая существует, называется спектральной плотностью, обозначим ее через  $g(\lambda)$ . Отметим, что  $R(0) = \langle X_0^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda$ . Заметим, что спектральная плотность последовательности  $(Z_n^{(\alpha)})$  существует.

Следующую величину

$$E = \kappa^2 \langle X_0^2 \rangle, \quad (86)$$

где  $\kappa$  — некоторая положительная константа, будем интерпретировать как энергию процесса  $(X_n)$  (см. следующее замечание 4.1), при этом  $f(\lambda) = \kappa^2 g(\lambda)$  является плотностью распределения энергии процесса по частотам, поскольку  $E = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$ .

Энергию континуумов  $A(\alpha) \cdot S_\alpha$  и  $A(\alpha) \cdot K_{1/\alpha}$  определим как энергию процессов  $(Z_n^{(\alpha)})$  и  $(Z_n^{(\alpha)} + A(\alpha)/2)$  соответственно (см. соотношения (84), (85)).

**Замечание 4.1.** Сделаем некоторые пояснения приведенной интерпретации энергии процесса как величины пропорциональной дисперсии этого процесса. Рассмотрим некоторое вероятностное пространство, меру на этом пространстве обозначим через  $\mathbf{P}$ . Пусть  $(X_n)$  — стационарная последовательность на этом пространстве. Существует такая ортогональная стохастическая мера  $H = H(\Delta)$ ,  $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$ , что для каждого  $n \geq 0$  (почти всюду относительно меры  $\mathbf{P}$ )

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} H(d\lambda) \quad (87)$$

при этом  $\langle |H(\Delta)|^2 \rangle = G(\Delta)$  (см., например, [41]). Рассмотрим дискретное представление интеграла (87), а именно:  $X_n^{(d)} = \sum_k e^{i\lambda_k n} \Phi_k$ , где  $\Phi_k = H([\lambda_k, \lambda_{k+1}])$ . Процесс  $(X_n^{(d)})_{n \geq 0}$  имеет своими составляющими элементарные гармонические колебания  $e^{i\lambda_k n} \Phi_k$  со случайными амплитудами  $\Phi_k$ . Как известно полная энергия гармонических колебаний пропорциональна квадрату амплитуды этих колебаний. В этом смысле естественно, что  $\langle (X_n^{(d)})^2 \rangle = \sum_k \langle |\Phi_k|^2 \rangle$  интерпретируется как энергия процесса  $(X_n^{(d)})$  (с точностью до константы  $\kappa^2$ ) и соответственно  $\langle X_n^2 \rangle$  интерпретируется как энергия процесса  $(X_n)$  (с точностью до некоторой константы) (см., например, [32, гл. 3, §7]).

#### 4.3.1 Теорема об устойчивости спектральной плотности

Обозначим через  $f_\alpha$  плотность энергии процесса  $(Z_n^{(\alpha)})$  (см. соотношение (83)).

**Теорема 4.3.** Пусть  $\delta$  — произвольное неотрицательное действительное число и  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда для любого  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  выполняется равенство

$$\frac{1}{f_\beta(\lambda)} = \delta + \frac{1}{f_\alpha(\lambda)}, \quad (88)$$

где  $\beta = \frac{2}{h + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \sqrt{(h + \alpha + \frac{1}{\alpha})^2 - 4}}$ , при этом  $h = \delta(d\kappa)^2$ .

Отметим, что в теореме 4.3 значение  $\beta$  определяется параметрами  $\alpha$  и  $\delta$ , соответствующую функцию будем обозначать в дальнейшем  $\beta = \beta(\alpha, \delta)$ . Заметим также, что имеет место неравенство  $\beta \leq \alpha$  ( $\beta = \alpha$  в том и только в том случае, когда  $\delta = 0$ ). Кроме того, непосредственно из (88) сразу вытекает неравенство, выполняющееся при всех  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ :

$$f_\beta(\lambda) \leq f_\alpha(\lambda). \quad (89)$$

Из теоремы 4.3 сразу вытекает следующее следствие.

**Следствие 4.3.** Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta$  — неотрицательные действительные числа, для которых выполняется тождество (88),  $e_0$  — произвольное неотрицательное действительное число. Тогда для любого

$\lambda \in [-\pi, \pi]$  выполняется равенство

$$(f_\alpha(\lambda) + e_0 - f_\beta(\lambda))^2 - (f_\alpha^2(\lambda) + f_\beta^2(\lambda) - 2f_\alpha(\lambda)f_\beta(\lambda)(1 - \delta e_0)) = e_0^2. \quad (90)$$

**Предложение 4.1.** Пусть  $0 < \beta \leq \alpha < 1$ . Функция  $f_\alpha(\lambda) + e_0 - f_\beta(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  является плотностью энергии последовательности  $(B_n)$

$$B_n = \sqrt{2\pi}d\gamma \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} + \frac{\sqrt{2\pi e_0}}{\kappa} \eta_n, \quad n \geq 0, \quad (91)$$

где  $(\eta_n)_{n \geq 0}$  и  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  — некоррелируемые последовательности, являющиеся белым шумом,  $\gamma = \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}}{\alpha\beta}$  и  $c_j = \sum_{k=0}^j \alpha^{j-k+1} \beta^{k+1}$ ,  $j \geq 0$ .

#### 4.3.2 Построение геометрии квазичастиц

Пусть выполняются условия теоремы 4.3. Найдется положительное значение  $e_0$ , такое что  $\delta e_0 \leq 2$ , тогда  $1 - \delta e_0 = \cos \psi$ , при некотором  $\psi \in [0, \pi]$  (очевидно, что  $\delta = \frac{1 - \cos \psi}{e_0}$ ). Стало быть, соотношение (90) из следствия 4.3 для пары  $f_\alpha, f_\beta$  можно переписать в виде:

$$(f_\alpha + e_0 - f_\beta)^2 - \|f_\alpha \vec{l} - f_\beta \vec{m}\|^2 = e_0^2, \quad (92)$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^k$  и  $\vec{l}, \vec{m}$  — некоторые векторы единичной длины в  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \geq 2$ , такие что  $\angle(\vec{l}, \vec{m}) = \psi$ .

Последовательность  $(B_n)$  (см. предложение 4.1), в которой  $\beta = \beta(\alpha, \delta)$  (см. теорему 4.3), где  $\delta = \frac{1 - \cos \psi}{e_0}$ , будем обозначать через

$(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$ , при этом, когда  $\psi = 0$  (в этом случае  $\alpha = \beta$ ), последовательность  $(B_n)$  будем обозначать через  $(B_n^{(e_0)})$ .

Соотношение (88) задает дробно-линейный закон преобразования плотности энергии процесса  $(Z_n^{(\alpha)})$  в плотность энергии процесса  $(Z_n^{(\beta)})$ . При этом из предложения 4.1 следует, что можно выделить процессы  $(B_n^{(e_0)})$  и  $(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$  с плотностями энергий  $e_0$  и  $f_\alpha + e_0 - f_\beta$  соответственно, так что выполняется закон преобразования энергии:

$$f_\alpha + e_0 = f_\beta + (f_\alpha + e_0 - f_\beta). \quad (93)$$

Имея ввиду соотношение (93), будем говорить о взаимодействии процессов  $(Z_n^{(\alpha)})$  и  $(B_n^{(e_0)})$ , которое приводит к процессам  $(Z_n^{(\beta)})$  и  $(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$  соответственно. Придавая импульсный характер второму слагаемому левой части соотношения (92), приведем геометрическую интерпретацию указанному взаимодействию. Для этого введем понятие квазичастицы (мы будем следовать работе [72]).

Семейство процессов  $\Gamma = \{(Z_n^{(\alpha)})_{n \geq 0} : 0 < \alpha \leq 1/2\}$  будем называть  *$\gamma$ -квазичастицей*. Семейство процессов  $\Sigma(e_0) = \{(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})_{n \geq 0} : 0 < \alpha \leq 1/2, 0 \leq \psi \leq \pi\}$  назовем  *$\varepsilon$ -квазичастицей с параметром  $e_0$* . Будем говорить, что каждый процесс из этих семейств является состоянием соответствующей квазичастицы.

Пусть  $\mathbb{R}_{1,k}^{k+1}$  — псевдоевклидово пространство с псевдоскалярным

произведением:  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_0 y_0 - \varsigma^2 \sum_{i=1}^k x_i y_i$ , где  $\varsigma$  — некоторая положительная константа. Каждый  $k + 1$ -вектор  $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$  будем представлять в виде пары  $(u_0, \vec{v})$ , где  $\vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ .

Через  $\mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(e)$  обозначим множество всех отображений, действующих из  $[-\pi, \pi]$  в  $\mathbb{R}_{1,k}^{k+1}$ , таких что при любом  $u \in \mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(e)$  выполняется равенство  $\langle u(\lambda), u(\lambda) \rangle = e^2$  для всех  $\lambda \in [-\pi, \pi]$ .

Пусть  $S$  — сфера в  $\mathbb{R}^k$ . Каждому процессу из множеств  $\Gamma$  и  $\Sigma(e_0)$  сопоставим некоторые подмножества множеств  $\mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(0)$  и  $\mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(e_0)$  соответственно, а именно, положим:  $Q(Z_n^{(\alpha)}) = \{(f_\alpha, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{k}) : \vec{k} \in S\}$  и  $Q(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)}) = \{(f_\alpha + e_0 - f_\beta, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{l} - \frac{f_\beta}{\varsigma} \vec{m}) : \vec{l}, \vec{m} \in S, \angle(\vec{l}, \vec{m}) = \psi, \beta = \beta(\alpha, \delta), \delta = \frac{1 - \cos \psi}{e_0}\}$  (значение  $\beta = \beta(\alpha, \delta)$  определяется в теореме 4.3). Заметим, что  $Q(B_n^{(e_0)}) = \{(e_0, \vec{0})\}$ . Отметим, что справедливость включения  $Q(Z_n^{(\alpha)}) \subseteq \mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(0)$  является очевидной, справедливость же второго включения  $Q(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)}) \subseteq \mathcal{R}_{1,k}^{k+1}(e_0)$  сразу вытекает из соотношения (92).

Первая компонента  $k + 1$ -векторов, соответствующих  $Q(Z_n^{(\alpha)})$  и  $Q(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$  является плотностью распределения энергии процесса, представляющего состояние соответствующей квазичастицы. Второй компоненте придадим смысл плотности импульса квазичастицы. Если у квазичастицы вторая (импульсная) компонента равна  $\vec{0}$ , будем называть ее покоящейся, заметим, что покоящейся может

быть только  $\varepsilon$ -квазичастица.

Возвращаясь к соотношениям (92) и (93), имеем

$$(f_\alpha, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{l}) \in Q(Z_n^{(\alpha)}), \quad (e_0, \vec{0}) \in Q(B_n^{(e_0)}) \quad (94)$$

и

$$(f_\beta, \frac{f_\beta}{\varsigma} \vec{m}) \in Q(Z_n^{(\beta)}), \quad (f_\alpha + e_0 - f_\beta, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{l} - \frac{f_\beta}{\varsigma} \vec{m}) \in Q(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)}), \quad (95)$$

где  $\beta = \beta(\alpha, \delta)$  и  $\delta = \frac{1 - \cos \psi}{e_0}$ . Кроме того, выполняется равенство

$$(f_\alpha, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{l}) + (e_0, \vec{0}) = (f_\beta, \frac{f_\beta}{\varsigma} \vec{m}) + (f_\alpha + e_0 - f_\beta, \frac{f_\alpha}{\varsigma} \vec{l} - \frac{f_\beta}{\varsigma} \vec{m}). \quad (96)$$

Соотношение (96) является законом динамики для квазичастиц. Кроме того, равенства (94)–(96) выражают аналог связи энергии и импульса в релятивистской механике ( $\gamma$ -квазичастица является аналогом фотона, а  $\varepsilon$ -квазичастица — аналогом электрона).

#### 4.4 Перенос энергии и импульса при смене топологии

Обозначим  $C_{q,a,A}(x) = AC_q(x/a)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  и  $D_{q,b,B}(x) = BD_q(x/b)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $a, A$  и  $b, B$  — положительные константы. Определим метрики  $\rho_{q,a,A}(x, y) = |C_{q,a,A}(x) - C_{q,a,A}(y)|$  и  $\varrho_{q,b,B}(x, y) = |D_{q,b,B}(x) - D_{q,b,B}(y)|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_k)$ ,  $A = (A_1, \dots, A_k)$  и  $b = (b_1, \dots, b_k)$ ,  $B = (B_1, \dots, B_k)$  — наборы, содержащие положительные константы. Определим метрики:  $\rho_{k,q,a,A}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \rho_{q,a_j,A_j}^2(x_j, y_j)}$ ,

$\varrho_{k,q,b,B}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varrho_{q,b_j,B_j}^2(x_j, y_j)}$ , где  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ,  $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ .

Если заменить в следствиях 4.1 и 4.2 метрики  $\rho_{k,q}$  и  $\varrho_{k,q}$  на  $\rho_{k,q,a,A}$  и  $\varrho_{k,q,b,B}$  соответственно, то в итоге получим

$$\langle \varrho_{k,q,b,B}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \asymp n^{1/d_q} \quad (97)$$

и

$$\langle \rho_{k,q,a,A}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \asymp n^{d_q}, \quad (98)$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$  и соотношение  $g(n) \asymp f(n)$  означает, что  $g(n) = O(f(n))$  и  $f(n) = O(g(n))$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_k)$  — произвольная точка из  $\mathbb{R}^k$ , в дальнейшем нам понадобятся обозначения:

$$C_{q,a,A}(x) = (A_1 C_q(x_1/a_1), \dots, A_k C_q(x_k/a_k))$$

и

$$D_{q,b,B}(x) = (B_1 D_q(x_1/b_1), \dots, B_k D_q(x_k/b_k)).$$

#### 4.4.1 Супердиффузионный режим переноса

Пусть  $b = (b_1, \dots, b_k)$  и  $B = (B_1, \dots, B_k)$  — наборы, состоящие из произвольных положительных констант. Рассмотрим блуждание  $(\mathbf{M}_n)_{n \geq 0}$ , где

$$\mathbf{M}_n = D_{q,b,B}(\mathbf{S}_n).$$



В соответствии с (97) выполняется соотношение

$$\langle \|\mathbf{M}_n\|^2 \rangle \asymp n^{1/d_q}. \quad (99)$$

Заметим, что в каждый момент времени  $n$  почти для каждого  $\omega$  значение

$$\mathbf{M}_n(\omega) \in B_1 K^e \times \cdots \times B_k K^e, \quad (100)$$

где  $B_1, \dots, B_k$  — масштабные константы (множество  $K^e$  определено в (75)).

Отметим, что

$$\mathbf{M}_n = (\varrho_{q,b_1,B_1}(S_n^{(1)}, 0) \text{sign}(S_n^{(1)}), \dots, \varrho_{q,b_k,B_k}(S_n^{(k)}, 0) \text{sign}(S_n^{(k)})).$$

Итак, стандартный процесс блуждания  $(\mathbf{S}_n)$  деформируется в процесс  $(\mathbf{M}_n)$  относительно метрики  $\varrho_{k,q,b,B}$ .

В силу того, что все компоненты исследуемых многомерных случайных блужданий и стационарных процессов независимы и ведут себя по времени одинаковым образом, в дальнейшем мы будем рассматривать одномерные компоненты соответствующих процессов.

Найдем энергетические характеристики деформации классического процесса блуждания в процесс аномальной диффузии.

Напомним, что процесс

$$(Z_n^{(\alpha)} + A(\alpha)/2), \quad (101)$$

где  $A(\alpha) = \frac{2d\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 1/2$  является *колебанием континуума*  $A(\alpha) \cdot K_{1/\alpha}$  (см. раздел 3, соотношение (85)), при этом энергия этого процесса определяет энергию этого континуума.

**Предложение 4.2.** *При всех  $n = 0, 1, \dots$  выполняется равенство*

$$\varrho_{q,b,B}(Z_n^{(1/2)} + b/2, 0) = Z_n^{(\beta)} + B/2 \quad \text{н. н.},$$

где  $\beta = 1/q$ ,  $b = 4d\sqrt{\pi}$  и  $B = \frac{2d\sqrt{2\pi\beta}}{1-\beta}$ .

Мы имеем, что  $j$ -ая компонента  $(S_n^{(j)})$  блуждания  $(\mathbf{S}_n)$  деформируется в  $j$ -ую компоненту  $(M_n^{(j)})$  блуждания  $(\mathbf{M}_n)$  относительно метрики  $\varrho_{q,b_j,B_j}$ , где  $1 \leq j \leq k$ . В свою очередь процесс  $Z_n^{(1/2)} + b/2$  деформируется в процесс  $Z_n^{(\beta)} + B/2$  относительно метрики  $\varrho_{q,b,B}$ , где  $\beta = 1/q$  и значения констант  $b$ ,  $B$  определены в предложении 4.2. Установим соответствие между метриками  $\varrho_{q,b_j,B_j}$  и  $\varrho_{q,b,B}$ . Полагая  $b_j = b$ , получаем, что  $d = \frac{b_j}{4\sqrt{\pi}}$ , в частности, вычисленное значение  $d$  позволяет найти постоянную  $B$ , а именно:  $B = \frac{2b_j\sqrt{\pi\beta}}{2\sqrt{\pi}(1-\beta)}$ . Поскольку набор  $(B_1, \dots, B_k)$  — произвольный набор констант, поэтому положим  $B_j = B$ . В итоге мы получим, что процесс  $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$  деформируется в процесс  $(Z_n^{(\beta)} + B_j/2)$  относительно метрики  $\varrho_{q,b_j,B_j}$ .

Заметим, что процесс  $Z_n^{(\beta)} + B_j/2$  сосредоточен на множестве  $B_jK_q$ , являющимся подмножеством множества  $B_jK^e$ , при этом на множестве  $B_jK^e$  «находится»  $j$ -ая компонента  $\mathbf{M}_n$  (см. соотношение (100)).

Деформации процесса  $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$  в процесс  $(Z_n^{(\beta)} + B_j/2)$  со-

ответствует закон динамики (96) для квазичастиц, где  $\alpha = 1/2$  и  $\beta = 1/q$ . Напомним, что в этом случае происходит взаимодействие  $\varepsilon$ -квазичастицы, находящейся в состоянии  $(B_n^{(e_0)})$ , с  $\gamma$ -квазичастицей, находящейся в состоянии  $(Z_n^{(\alpha)})$ , что приводит к  $\gamma$ - и  $\varepsilon$ -квазичастицам, находящимся в состояниях  $(Z_n^{(\beta)})$  и  $(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$  соответственно (см. соотношения (94) и (95)).

Из неравенства (89) следует, что энергия процесса  $(Z_n^{(\beta)})$  меньше энергии процесса  $(Z_n^{(\alpha)})$ , т. е. энергия континуума, при таком преобразовании уменьшается, при этом энергия процесса  $(B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})$  больше по сравнению с энергией процесса  $(B_n^{(e_0)})$ .

Процессу  $(S_n^{(j)})$  сопоставим стационарный процесс  $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$ . В итоге мы получаем следующее преобразование для двойки процессов  $((S_n^{(j)}), (Z_n^{(1/2)} + b_j/2))$  относительно метрики  $\varrho_{q, b_j, B_j}$ :

$$\begin{aligned} ((S_n^{(j)}), (Z_n^{(1/2)} + b_j/2)) \text{ деформируется в} \\ ((M_n^{(j)}), (Z_n^{(\beta)} + B_j/2)), \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \tag{102}$$

при этом «внешним фактором», вызывающим деформацию процесса  $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$ , является процесс  $(B_n^{(e_0)})$  (поскольку деформации стационарных процессов мы придали характер взаимодействия, используя  $\varepsilon$ - и  $\gamma$ -квазичастицы).

Ранее уже отмечалось (см. введение), что деформация процесса  $(\mathbf{S}_n)$  классической диффузии моделирует взаимодействие *диффундирующих частиц* (т. е. диффундирующей среды) и *внешней среды* и

приводит к закону перемещения диффундирующей частицы:  $(M_n)$ . Сформулируем *гипотезу о подобии* динамических моделей описания деформации диффузии и стационарных процессов.

*Гипотеза о подобии*: динамическое описание деформации классической диффузии определяется динамическим описанием той же деформации, примененной к стационарным процессам, сосредоточенным на компактах положительной лебеговой меры того же континуума, на котором рассматривается процесс классической диффузии.

Выполнение этой гипотезы предполагает реализацию следующих условий:

(H<sub>1</sub>) состояния  $\gamma$ -квазичастиц (т. е. процессы типа (85)) определяют энергетические состояния диффундирующей среды;

(H<sub>2</sub>) состояния  $\varepsilon$ -квазичастиц (т. е. процессы типа (91)) определяют энергетические состояния внешней среды;

(H<sub>3</sub>) перенос энергии и импульса в системе внешняя среда-диффундирующая среда определяется переносом энергии и импульса между квазичастицами.

Подводя итог, получаем, что в результате взаимодействия квазичастиц энергия континуума (как энергия одного из состояний  $\gamma$ -квазичастицы), соответствующего диффундирующим частицам, уменьшается, при этом энергия процесса, соответствующего внешней среде увеличивается. Напомним, что в этом случае имеет место

соотношение:

$$\begin{aligned} & ((Z_n^{(1/2)} + b_j/2), (B_n^{(e_0)})) \text{ преобразуется в} \\ & ((Z_n^{(\beta)} + B_j/2), (B_n^{(\alpha, \psi, e_0)})). \end{aligned} \tag{103}$$

Преобразование (103), в рамках условий (Н<sub>1</sub>)–(Н<sub>3</sub>), интерпретируется следующим образом: диффундирующая среда передает энергию и импульс внешней среде. При этом закон перемещения частицы принимает вид:  $\mathbf{M}_n$  (см. первые компоненты доек в (102)), что соответствует супердиффузионному режиму переноса (см. соотношение (99)).

#### 4.4.2 Субдиффузионный режим переноса

Пусть  $a = (a_1, \dots, a_k)$  и  $A = (a_1, \dots, a_k)$  — наборы, состоящие из положительных констант. Рассмотрим блуждание  $(\mathbf{N}_n)_{n \geq 0}$ , где

$$\mathbf{N}_n = C_{q,a,A}(\mathbf{S}_n).$$

В соответствии с (98) имеем:  $\langle \|\mathbf{N}_n\|^2 \rangle \asymp n^{d_q}$ .

Заметим, что из (78) следует справедливость соотношения:

$$\mathbf{N}_n = (\rho_{q,a_1,A_1}(S_n^{(1)}, 0) \text{ sign}(S_n^{(1)}), \dots, \rho_{q,a_k,A_k}(S_n^{(k)}, 0) \text{ sign}(S_n^{(k)})).$$

Стало быть, стандартный процесс блуждания  $(\mathbf{S}_n)$  деформируется в процесс  $(\mathbf{N}_n)$  относительно метрики  $\rho_{k,q,a,A}$ . Найдем энергетические характеристики этой деформации.

**Предложение 4.3.** При всех  $n = 0, 1, \dots$  выполняется равенство

$$\rho_{q,a,A}(Z_n^{(\beta)} + a/2, 0) = Z_n^{(1/2)} + A/2 \quad \text{н. н.},$$

где  $\beta = 1/q$ ,  $a = d \cdot \frac{2\sqrt{2\pi\beta}}{1-\beta}$  и  $A = 4d\sqrt{\pi}$ .

Деформации  $j$ -ой компоненты блуждания  $\mathbf{S}_n$  в  $j$ -ую компоненту  $\mathbf{N}_n$  относительно метрики  $\rho_{q,a_j,A_j}$  поставим в соответствие деформацию процесса  $Z_n^{(\beta)} + a/2$  в процесс  $Z_n^{(1/2)} + A/2$  относительно метрики  $\rho_{q,a,A}$ , где  $\beta = 1/q$ . Для этого положим  $a_j = a$ , откуда получим, что  $d = \frac{a_j(1-\beta)}{2\sqrt{2\pi\beta}}$ . Далее, для найденного  $d$ , в силу произвольности набора  $(A_1, \dots, A_k)$ , положим  $A_j = 4d\sqrt{\pi}$ .

Процесс  $(Z_n^{(\beta)} + a_j/2)$  деформируется в процесс  $(Z_n^{(1/2)} + A_j/2)$  относительно метрики  $\rho_{q,a_j,A_j}$ , при этом энергия континуума при таком преобразовании увеличивается. Этой деформации соответствует закон динамики (96) для квазичастиц, где  $\alpha = 1/2$  и  $\beta = 1/q$ , при этом левые и правые части этого соотношения меняются местами, соответственно,  $\varepsilon$ -квазичастица, находящаяся в состоянии  $(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$ , в результате взаимодействия меняет его на состояние  $(B_n^{(e_0)})$  с меньшей энергией, т. е. энергия процесса, определяющего энергетическое состояние внешней среды, уменьшается (см. выше условия  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  и  $(H_3)$ ), что приводит к эффектам «залипания», отвечающим субдиффузии.

#### 4.5 Доказательство утверждений

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Доказательство теоремы следует непосредственно из теоремы 3.1, в этой теореме в качестве  $A_0$  необходимо выбрать отрезок  $[0, 1]$  и в качестве  $B_0$  — множество Кантора  $K_q$  (см. также замечание 3.2). Теорема доказана.

Приведем следующее утверждение из [11].

**Лемма 4.1.** *Для каждого  $2 \leq q < \infty$  имеют место неравенства:*

$$t^{d_q}/(q-1)^{d_q} \leq C_q(t) \leq t^{d_q}, \quad t \geq 0,$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ .

Заметим, что в лемме 4.1 оба неравенства точные. Левое неравенство достигается при  $t$ , имеющих вид  $(q-1)q^m$ , соответственно правое — при  $q^m$ , где  $m$  — целое число. Непосредственно из леммы 4.1 вытекает следующая лемма.

**Лемма 4.2.** *Для каждого  $2 \leq q < \infty$  имеют место неравенства:*

$$t^{1/d_q} \leq D_q(t) \leq (q-1)t^{1/d_q}, \quad t \geq 0,$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Доказательство теоремы вытекает теоремы 3.2, в этой теореме в качестве  $A_0$  необходимо выбрать отрезок  $[0, 1]$  и в качестве  $B_0$  — множество Кантора  $K_q$  (см. также замечание 3.4). Теорема доказана.

Отметим следующий общий результат (см. [15]).

**Лемма 4.3.** *Спектральная плотность  $g(\lambda)$  стационарной последовательности  $(X_n)_{n \geq 0}$  существует тогда и только тогда, когда  $X_n$  получается с помощью скользящего суммирования, т. е. если*

$$X_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varepsilon_{n+m},$$

где последовательность  $(\varepsilon_n)$  является белым шумом и  $(a_n)$  — неслучайная последовательность, такая что  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 < \infty$ , при этом  $g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(\lambda)|^2$ , где  $\varphi(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} a_m$ .

**Лемма 4.4.** *Спектральная плотность процесса  $(Z_n^{(\alpha)})$  имеет вид:*

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{\alpha d^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4.3 следует, что  $\varphi(\lambda) = d\sqrt{2\pi/\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} e^{i\lambda m} \alpha^{m+1} = d\sqrt{2\pi\alpha} \frac{1}{1-\alpha e^{i\lambda}}$ . Из того, что  $g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(\lambda)|^2$  мы сразу получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Прежде всего из леммы 4.4 следует, что при любом  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  следующее равенство

$$\frac{1}{f_\beta(\lambda)} = \delta + \frac{1}{f_\alpha(\lambda)}$$

эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{\kappa^2 d^2} \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) = \delta + \frac{1}{\kappa^2 d^2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (104)$$



Решая уравнение (104) относительно  $\beta$ , получаем утверждение теоремы.

**Лемма 4.5.** Пусть  $(a_n)$  и  $(b_n)$  — последовательности, суммируемых с квадратом действительных чисел и  $(c_n)$  — последовательность, определяемая следующим образом:

$$c_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{n-m} b_m. \quad (105)$$

Будем считать, что  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ . Пусть  $g_a(\lambda)$  и  $g_b(\lambda)$  — спектральные плотности последовательностей  $(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \varepsilon_{n+m})$  и  $(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \varepsilon_{n+m})$  соответственно. Тогда спектральная плотность последовательности  $(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \varepsilon_{n+m})$  имеет вид:  $2\pi g_a(\lambda) g_b(\lambda)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi_a(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} a_m$ ,  $\varphi_b(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} b_m$  и  $\varphi_c(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda m} c_m$ . Тогда, поскольку выражение (105) является сверткой последовательностей  $(a_n)$  и  $(b_n)$ , поэтому для всех  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  выполняется соотношение  $\varphi_c(\lambda) = \varphi_a(\lambda) \varphi_b(\lambda)$ . Из леммы 4.3 следует, что спектральная плотность  $g_c(\lambda)$  последовательности  $(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \varepsilon_{n+m})$  равна  $\frac{1}{2\pi} |\varphi_c(\lambda)|^2$ . С другой стороны,  $g_a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi_a(\lambda)|^2$  и  $g_b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi_b(\lambda)|^2$ , откуда и из найденного представления для  $g_c$  мы сразу получаем утверждение леммы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.1.** Используя явный вид  $g_\alpha$  и

$g_\beta$  (см. лемму 4.4), мы выводим, что для всех  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  выполняется равенство

$$g_\alpha(\lambda) - g_\beta(\lambda) = c^2 g_\alpha(\lambda) g_\beta(\lambda), \quad (106)$$

где  $c^2 = \frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{\alpha\beta d^2}$ . Из леммы 4.5 следует, что  $2\pi g_\alpha(\lambda) g_\beta(\lambda)$  является спектральной плотностью процесса  $\frac{2\pi d^2}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j}$ . Тогда спектральной плотностью процесса

$$\frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi d^2}{\sqrt{\alpha\beta}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} \quad (107)$$

является правая часть соотношения (106). Спектральной же плотностью процесса  $\frac{\sqrt{2\pi e_0}}{\kappa} \eta_n$  является  $e_0/\kappa^2$ , откуда и из (107) получаем, что  $g_\alpha(\lambda) + \frac{e_0}{\kappa^2} - g_\beta(\lambda)$ ,  $\lambda \in [-\pi, \pi]$  является спектральной плотностью процесса, определенного в (91). Предложение доказано.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.2.** В силу определения метрики  $\varrho$  получаем, что для любого  $y \geq 0$  выполняется равенство

$$\varrho_{1/\beta, b, B}(y, 0) = D_{1/\beta, b, B}(y).$$

Пусть  $x$  не имеет представления в виде двоичной рациональной дроби с периодом 0. Соответственно, имеем разложение:  $x = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j / 2^{j+1}$ , где каждое  $\gamma_j$  равно 0 или 1. Тогда выполняется ра-

ВЕНСТВО:

$$D_{1/\beta, b, B}(y) = B(1/\beta - 1) \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \beta^{j+1}, \quad (108)$$

где  $y = xb$ .

Далее, имеем  $\frac{Z_n^{(1/2)} + b/2}{b} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \eta_{n+j}$ , где  $\eta_j = (1 + \varepsilon_j)/2$ ,  $j \geq 0$ . Стало быть, используя (108), получаем равенство:  $D_{1/\beta, b, B}(Z_n^{(1/2)}(\omega) + b/2) = B(1/\beta - 1) \sum_{j=0}^{+\infty} \beta^{j+1} \eta_{n+j}(\omega)$  почти для всех  $\omega$  относительно соответствующей вероятностной меры, при этом правая часть последнего равенства совпадает с  $Z_n^{(\beta)}(\omega) + B/2$  почти для всех  $\omega$ . Предложение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.3. Из определения метрики  $\rho$  следует, что для любого  $y \geq 0$  выполняется равенство

$$\rho_{1/\beta, a, A}(y, 0) = C_{1/\beta, a, A}(y).$$

Пусть  $x$  имеет представление:  $x = (1/\beta - 1) \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j \beta^{j+1}$ , где каждое  $\gamma_j$  равно 0 или 1. Тогда имеет место равенство:

$$C_{1/\beta, a, A}(y) = A \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j / 2^{j+1}, \quad (109)$$

где  $y = xa$ . Выполняется соотношение:  $\frac{Z_n^{(\beta)} + a/2}{a} = (1/\beta - 1) \sum_{j=0}^{+\infty} \beta^{j+1} \eta_{n+j}$ , где  $\eta_j = (1 + \varepsilon_j)/2$ ,  $j \geq 0$ . Следовательно, в соответствии с (109) почти для всех  $\omega$  относительно соответствующей

вероятностной меры, имеет место равенство:

$$C_{1/\beta, a, A}(Z_n^{(\beta)}(\omega) + a/2) = A \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \eta_{n+j}(\omega).$$

Остается заметить, что правая часть последнего равенства совпадает с  $Z_n^{(1/2)}(\omega) + A/2$  почти для всех  $\omega$ . Предложение доказано.

#### 4.6 Результаты главы 4

Построенная в четвертой главе модель аномальной диффузии основана на следующих предположениях: 1) аномальность является следствием деформации процесса классической диффузии с помощью преобразований евклидовой топологии, 2) энергетические характеристики деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии определяются деформацией стационарных процессов сдвига, сосредоточенных на непрерывном и сингулярном континууме.

Предложенная реализация предположений 1) и 2) в безразмерной математической модели осуществляется за счет введения квазичастиц. Назначение квазичастиц состоит в том, чтобы представить ту часть процесса аномальной диффузии, которая отражает процессы обмена энергией и импульсом блуждающих частиц с внешней средой. Процесс обмена энергией и импульсом регулируется динамическими соотношениями (94)—(96) для квазичастиц, а элементарный акт обмена сводится к эффекту «типа Комптона», который в без-

размерной математической модели допускает прямую реализацию в случае супердиффузии и обратную в случае субдиффузии.

## ГЛАВА 5

### Модель случайного блуждания, определяемая структурой потока памяти и стохастической моделью сил

#### 5.1 Введение

Исследование моделей процессов стохастических переносов, связанных с проявлением свойств пространственно-временных нелокальностей, в ряде работ (см., например, [56], [34], [54]) позволяет считать, что показатель степенного изменения по времени среднего квадрата перемещения частиц формируется из соотношения параметров пространственно-временной нелокальности.

При этом выделим два известных подхода к формированию процессов аномальной диффузии: первый подход состоит в использовании так называемого дробного (фрактального) броуновского движения, а второй — в использовании модели блуждания в непрерывном времени (CTRW-модель). В первом случае в зависимости от значения параметра Хёрста, определяющего «сильную зависимость» приращений процесса на непересекающихся временных интервалах, может возникнуть как суб- так и супердиффузионный режим. Во втором случае используется техника устойчивых распределений, при этом суб- и супердиффузионный режим процесса определяется отношением параметров устойчивых распределений, соответствующих времени ожидания и величине скачка частицы,

участвующей в блуждании. Заметим, что второй подход приводит к уравнениям аномальной диффузии. (см., [56], [34]).

Перейдем к постановке задач. Пусть мы имеем информацию о степенном росте по времени среднего квадрата перемещения некоторой частицы. В каком соотношении находятся параметры памяти и пространственной нелокальности, формирующие степенной показатель среднего квадрата стохастического перемещения, при условии конечности моментов второго порядка этих перемещений? Следующей задачей является вычисление по выборочным данным параметров памяти и пространственной нелокальности.

В настоящей работе изменение импульса определяется действием стохастических сил, распределенных по времени некоторой функцией памяти (см. А. И. Олемский, А. Я. Флат [31], Р. Р. Нигматуллин [25]). Параметры, характеризующие пространственно-временную нелокальность, формируются структурой стохастических сил и видом функции памяти, при этом суб- и супердиффузионный режим блуждания определяется в рамках конечности момента второго порядка.

Отметим, что конечность момента второго порядка для всех режимов блуждания, а также использование феноменологии потока памяти отличает предлагаемую модель от моделей дробной кинетики, где используется феноменология дробного закона Фика, при этом в супердиффузионном режиме применяются техника устойчи-

вых распределений с бесконечным вторым моментом (см., например, [56], [34]). Кроме того, если для некоторого блуждания установлено, что показатель степенного изменения дисперсии находится в диапазоне  $(0, 4)$ , то, используя выборочные данные, можно оценить близость к представляемой в данной работе модели блуждания со степенной памятью.

Приведем поэтапное изложение содержания главы. В разделе 5.2 строится стохастическая модель блуждания частицы по выборке ее положения вдоль выделенного направления. За основу берется уравнение динамики (110), которое представляет изменение импульса частицы в виде суммарного результата дискретного потока памяти, где силы, действовавшие в предыдущие времена представляются в виде (112) и имеют определенную стохастическую природу, определяемую далее. Весовые коэффициенты дискретного потока представляются как приращения монотонной функции в (111), что приводит впоследствии к рассмотрению двух типов памяти. Предлагаемая модель позволяет представить текущее положение частицы в виде (113) и приступить к анализу действующих сил и памяти в сложной системе «частица - среда».

В разделе ?? рассматривается вопрос структурирования стохастических сил. Силы представляются через стационарные последовательности, на которые накладывается условие (H) (см. (115)), гарантирующее степенной рост среднего квадрата в виде (116).



В разделе 5.3 рассматриваются два типа монотонных функций, управляющих памятью частицы. Степенные функции реализуют монотонное изменение информации о предыстории. Для «лестницы Кантора в целом», полученной продолжением на всю положительную полуось с сохранением масштабной инвариантности, память формируется из разряженных импульсов с неубывающей амплитудой. Структуру разряженных импульсов устанавливает предложение 5.1.

Приведенное формирование памяти и стохастических сил позволяют «расщепить» степенной показатель изменения по времени среднего квадрата перемещения частицы на два параметра, один из которых отвечает за пространственную нелокальность действия среды на частицу, а второй — за наличие памяти (т. е. за нелокальность по времени). Это расщепление на два параметра приводится в теореме 5.1 и является первым основным результатом главы.

В разделе ?? получен второй основной результат. На основании близости процесса (113), определяющего положение частицы, к гауссовскому процессу (см. теорему 5.2) построен алгоритм вычисления параметров нелокальности.

В разделе 5.5 снижаются моментные ограничения до оптимальных в теореме 5.2 в случае  $H = 1/2$ .

В разделе 5.6 рассматривается более широкий класс функций памяти, представленный правильно меняющимися функциями.

В разделе 5.7 рассмотрен физический смысл параметров нелокальности.

В разделе 5.8 приводится доказательство основных утверждений.

Раздел 5.9 представляет собой «заклучение».

Основные результаты пятой главы опубликованы в [73], [74], [67], [68], [65], [66], [62], [77].

## 5.2 Построение информационной модели процесса аномальной диффузии

Прежде всего отметим, что в ряде работ (см., например, [7], [8]) для исследования процесса блуждания выделяется основное направление, вдоль которого проявляется аномальность процесса переноса.

Рассмотрим модель случайного изменения положения частицы с массой  $m$  в пространстве. Пусть частица в начальный момент времени находится в начале координат и, далее, фиксируется в моменты времени, кратные шагу измерения времени  $\tau$ . Будем исследовать аномальность блуждания вдоль некоторого направления. Пусть проекция на выделенное направление блуждания реализуется следующей случайной последовательностью:  $R_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $R_0 = 0$ .

В дальнейшем, мы будем рассматривать одномерное случайное блуждание  $(R_n)$ . Вычислим разностную скорость блуждающей частицы в момент  $k\tau$ ,  $k \geq 1$ :  $v(k\tau) = (R_k - R_{k-1})/\tau$ , где  $v(0) = 0$  и ее приращение  $\Delta v(k\tau) = v(k\tau) - v((k-1)\tau)$ ,  $k \geq 1$ .

Изменение импульса частицы в момент  $k\tau$  отражает влияние среды в данный и предыдущие моменты времени, и, в соответствии с моделью системы с памятью (см. [31], [25], [40]) представляется результатом действия некоторого потока

$$m\Delta v(k\tau) = \tau \sum_{i=1}^k p(k-i)f(i\tau), \quad (110)$$

в этом представлении  $(f(i\tau))_{i \geq 0}$  — случайная последовательность, имеющая размерность силы и  $(p(i))_{i \geq 1}$  — некоторая безразмерная последовательность неотрицательных чисел, где, будем считать,  $p(0) = 1$ . Для каждого  $i \geq 0$  значение  $p(i)$  представим в виде  $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$ , где  $M$  — некоторая неубывающая на неотрицательной полуоси функция, при этом для удобства будем считать, что  $M(0) = 0$ , соответственно при этом  $M(1) = 1$ . Соотношение (110) принимает вид

$$m\Delta v(k\tau)/\tau = \sum_{i=0}^{k-1} f((k-i)\tau)\Delta M(i), \quad (111)$$

заметим, что представленное соотношение исследовалось в работах автора [73], [65], [66].

Случайные величины  $f(i\tau)$  в (111) представим в виде

$$f(i\tau) = m(X_i - X_{i-1})/\tau^2, \quad i \geq 1, \quad (112)$$

где  $(X_i)$  — случайная последовательность, имеющая размерность длины (будем считать, что  $X_0 = 0$ ). Заметим, что в случае отсут-

ствия «памяти», когда имеют место равенства:  $p(0) = 1$  и  $p(i) = 0$  при всех  $i \geq 1$ , представление (110) дает классический закон изменения импульса под действием силы  $f(k\tau)$ , где последовательность  $(X_i)$  приобретает смысл перемещений частицы. В случае системы с памятью  $X_i$ ,  $i \geq 0$  не обязаны представлять перемещения в евклидовом пространстве. Структура последовательности  $(X_i)_{i \geq 1}$  будет определена ниже (см. раздел ??).

Из (111) и (112) находим следующее представление скорости в рассматриваемой модели с памятью

$$v(k\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^k X_{k-i} \Delta M(i).$$

Следовательно,  $R_n$  представляется в виде:

$$R_n = \tau \sum_{k=0}^n v(k\tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k X_{k-i} \Delta M(i), \quad n = 0, 1, \dots \quad (113)$$

Последовательность положений  $R_n$  частицы, построенную по функции  $M$ , будем обозначать через  $R_n(M)$ . Отметим, что случайный процесс  $R_n(M)$  будет рассматриваться нами как информационная модель аномального переноса. Далее будет установлено каким образом в зависимости от функции памяти  $M$  и последовательности  $(X_i)$  формируются состояния этой модели, представленные суб- и супердиффузионным режимом переноса.

В разделе 5.3 будет разъяснено использование в качестве функции  $M$  либо степенной функции  $p_\nu(t) = t^\nu$ ,  $\nu \geq 0$  (считаем, что  $p_0(0) =$

0), либо продолженной на всю положительную полуось лестницы Кантора  $C_q(t)$ ,  $q > 2$ .

Вернемся к вопросу структурирования последовательности  $(X_n)$ . Согласно (112), отсутствие условия независимости случайных величин  $(X_n)_{n \geq 1}$  означает, вообще говоря, что в данный момент времени  $i\tau$  результирующая среды  $f(i\tau)$  имеет ненулевые корреляции с соответствующими значениями этой результирующей в любые другие моменты времени и, стало быть, представление (113) реализует «перемешивание» памяти частицы и нелокальности воздействия среды.

Мы в дальнейшем ограничимся случаем стационарной последовательности  $(X_n)_{n \geq 1}$  с нулевыми средними. В широких предположениях условие стационарности последовательности  $(X_n)_{n \geq 1}$  эквивалентно тому, что  $X_n$  имеет следующее разложение (см., например, [15, теорема 16.7.1])

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} a_k, \quad (114)$$

где  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией и  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  — неслучайная суммируемая с квадратом последовательность действительных чисел.

Мы сузим класс рассматриваемых стационарных последовательностей, наложив следующее условие (Н) на последовательности  $(\xi_k)$  и  $(a_k)$ , в представлении (114):

(H): Последовательность  $(\xi_k)$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Последовательность  $(a_k)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} a_k &= \sigma L_H^{-1/2} ((k+1)^{H-1/2} - k^{H-1/2}), \quad k \geq 1, \\ a_0 &= \sigma L_H^{-1/2} \quad \text{и} \quad a_k = 0, \quad k < 0, \end{aligned} \quad (115)$$

где  $H$  — некоторый параметр, такой что  $0 < H < 1$ ,  $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$  и  $\sigma$  — ненулевая константа.

В случае  $H = 1/2$ , получаем, что  $a_0 = \sigma$  и  $a_k = 0$  при всех  $k \neq 0$ , в этом случае  $X_n = \sigma \xi_n$ ,  $n \geq 1$  — обычная последовательность независимых одинаково распределенных величин.

Выбор последовательности  $(a_k)$  мотивирован тем, что

$$\langle (\sum_{i=1}^n X_i)^2 \rangle \sim \sigma^2 n^{2H}, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (116)$$

Это означает, что с помощью такой последовательности мы можем моделировать весь содержательный спектр степенного изменения второго момента суммы  $\sum_{i=1}^n X_i$ . В разделе 5.6 приводится более широкий класс последовательностей  $(a_k)$ , удовлетворяющих условию (116), мы в данном разделе для простоты изложения ограничимся последовательностью, приведенной в условии (H).

### 5.3 Формирование памяти частицы по степенной функции и лестнице Кантора. Теорема о соотношении нелокальностей

Напомним, что согласно (111) последовательность  $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$ ,  $i \geq 0$  управляет памятью частицы.

Пусть  $M = p_\nu$  — степенная функция с показателем  $\nu$ . Начнем со случая  $\nu = 0$ . Значение  $\Delta p_\nu(0) = 1$  и  $\Delta p_\nu(i) = 0$  при всех  $i \geq 1$ , поэтому имеет место полная потеря памяти о предыстории частицы. В этом случае  $R_n(p_0) = \sum_{i=1}^n X_i$  и  $\langle R_n^2(p_0) \rangle \sim \sigma^2 n^{2H}$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. выше соотношение (116)). Стало быть, аномальность блуждания  $R_n(p_0)$  определяется нелокальностью воздействия среды на частицу.

В случае  $\nu = 1$  значение  $\Delta p_\nu(i) = 1$  для любого  $i \geq 0$ , т. е. можно говорить о полном сохранении информации о предыстории частицы.

Рассмотрим теперь случай  $0 < \nu < 1$ . Выполняется соотношение  $\Delta p_\nu(i) \sim \frac{\nu}{i^{1-\nu}} \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow +\infty$ , чему можно придать смысл «старения информации» о предыстории. В дальнейшем для степенной функции  $p_\nu$  мы будем *рассматривать именно случай*  $0 \leq \nu \leq 1$ , что соответствует представлению о «монотонном» уменьшении (возможно в не строгом смысле) информации о предыстории.

Помимо представленного случая монотонного изменения информации, мы будем рассматривать ситуацию, когда колебание  $\Delta M(i)$  убывает импульсным образом,

т. е.  $\Delta M(i)$  отлично от 0 для определенных моментов  $i$ , при этом с ростом  $i$  колебание  $\Delta M(i)$  все реже принимает значения отличные от 0. В качестве такой функции  $M$  мы будем рассматривать продолжение лестницы Кантора на всю положительную полуось с сохранением свойства масштабной инвариантности.

Приведем указанное продолжение лестницы Кантора. Множество Кантора  $K_q$ ,  $q > 2$  определяется как множество всех чисел вида  $\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i q^i$ , где каждый коэффициент  $a_i$  равен либо 0, либо  $q - 1$ . Множество  $K_3$  — классическое канторово множество, множество же  $K_2$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Размерность Хаусдорфа множества  $K_q$  равна  $d_q = \ln 2 / \ln q$  (см., например, [44]). В дальнейшем за буквой  $d_q$  закрепим обозначение размерности Хаусдорфа множества  $K_q$ .

Каждому множеству  $K_q$ ,  $2 < q < \infty$  соответствует непрерывная, неубывающая на отрезке  $[0, 1]$  функция  $C_q$ , называемая канторовой лестницей. Напомним, что для любого  $z = \sum_{i=-\infty}^{-1} b_i q^i \in K_q$  (каждый  $b_i$  равен либо 0, либо  $q - 1$ ) значение  $C_q(z) = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i 2^i$ , где  $a_i = b_i / (q - 1)$ .

Отметим, что в качестве поточечных пределов получаются функции  $C_2$  и  $C_\infty$ , а именно:  $C_2(t) = t$  для всех  $t \in [0, 1]$  и  $C_\infty(t) = 1/2$  при всех  $t \in (0, 1)$ ,  $C_\infty(0) = 0$  и  $C_\infty(1) = 1$ .

Для  $C_q(t)$ ,  $2 \leq q < \infty$  выполняется следующее известное свойство  $d_q$ -однородности (масштабной инвариантности) (см., например, [44])

$$C_q(t)/q^{d_q} = C_q(t/q) \quad (117)$$



при всех  $t \in [0, 1]$ .

Сохраняя свойство (117), продолжим  $C_q(t)$  на всю положительную полуось, для этого положим  $C_q(t) = 2^{n+1}C_q(t/q^{n+1})$  для каждого  $t \in [q^n, q^{n+1}]$ ,  $n \geq 0$ . Продолженная таким образом функция  $C_q$  обладает свойством

$$C_q(q^n t) = q^{nd_q} C_q(t) \quad (118)$$

при всех  $t \geq 0$  и целых  $n$ .

Функция  $C_\infty$  также продолжается на всю неотрицательную полуось, при этом дополнительно к тому, что  $C_\infty(t) = 1/2$  при всех  $t \in (0, 1)$ ,  $C_\infty(0) = 0$  и  $C_\infty(1) = 1$  (см. выше), выполняется равенство:  $C_\infty(t) = 1$  при всех  $t \geq 1$ . В этом случае значение  $\Delta C_\infty(0) = 1$  и  $\Delta C_\infty(i) = 0$  при всех  $i \geq 1$ , т. е. имеет место, как и в случае с функцией  $p_0(t)$ , полная потеря памяти о предыстории частицы.

Выполняется следующее свойство лестницы Кантора.

**Предложение 5.1.** *Пусть  $q$  — целое число, превосходящее 2. Тогда при любом  $i \geq 0$  значение  $C_q(i+1) - C_q(i)$  равно 0 или 1. При этом для любого сколь угодно большого  $N$  найдутся  $i, j \geq N$ , такие что  $C_q(i+1) - C_q(i) = 0$  и  $C_q(j+1) - C_q(j) = 1$ .*

Для канторовой лестницы в случае целого  $q$ , превосходящего 2, выполняется соотношение  $(C_q(q^{n+1}) - C_q(q^n))/(q^{n+1} - q^n) = (2^{n+1} - 2^n)/(q^{n+1} - q^n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Стало быть, средняя скорость изменения функции  $C_q$  на расширяющихся и удаляющихся от нача-

ла координат временных интервалах становится исчезающе малой. Это означает, что с ростом  $i$  значение  $\Delta C_q(i)$  все реже равно 1, при этом найдется сколь угодно большое  $i$ , для которого  $\Delta C_q(i) = 1$  (см. предложение 5.1).

Подводя итог, можно сказать, что бинарная последовательность  $(\Delta C_q(i))_{i \geq 0}$  моделирует *информационные потери* в предыстории частицы (часть состояний полностью исчезает (см. [25])), при этом отметим отличие от степенного случая, где речь идет не о потере информации, а о *монотонном уменьшении* информации о предыстории.

Основой для доказательства теорем 5.1–5.2 является следующее предложение. Это предложение представляет оценки скорости сходимости в принципе инвариантности в форме Штрассена и может представлять самостоятельный интерес.

**Предложение 5.2.** Пусть  $M$  — некоторая неубывающая на положительной полуоси функция, такая что  $M(0) = 0$ . Если  $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$  для некоторого  $\alpha > 2$ , то процессы  $R_{[t]}(M)$  и  $Z_t(M, H)$  можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при  $t \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M, H) = o(M(t)t^{H'-1/2+1/\alpha}) \text{ п. н.},$$

где  $H' = \max\{H, 1/2\}$ .

Аббревиатура «п. н.» в предыдущем и следующих утверждениях

означает «почти навверное».

Результатом следующей теоремы является «расщепление» показателя степенного изменения по времени второго момента исследуемого случайного блуждания. В дальнейшем будем писать  $g(n) \asymp f(n)$ , если  $g(n) = O(f(n))$  и  $f(n) = O(g(n))$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 5.1.** Пусть выполняется условие (H) и  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $2 < q < \infty$ . Тогда при  $n \rightarrow +\infty$  выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$\langle R_n^2(p_\nu) \rangle \sim \sigma^2 s_{\nu,H}^2 n^{2\nu+2H} \quad (119)$$

и

$$\langle R_{q^n}^2(C_q) \rangle \sim \sigma^2 c_{q,H}^2 q^{n(2d_q+2H)},$$

где  $s_{\nu,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v)$ ,  
 $c_{q,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dC_q(u) dC_q(v)$ . Кроме того,  $\langle R_n^2(C_q) \rangle \asymp n^{2d_q+2H}$ .

Отметим, что в теореме 5.1 параметр  $H$  отвечает за нелокальность воздействия среды, а параметр  $\nu$  и  $d_q$  отвечают за память частицы.

#### 5.4 Предельная теорема. Метод вычисления параметров нелокальности

Через  $B_H(t)$  обозначим так называемое дробное броуновское движение (см. [54]), т. е. центрированный гауссовский процесс с кова-

риационной функцией

$$R(t, s) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \quad 0 < H < 1. \quad (120)$$

Легко видеть, что случай  $H = 1/2$  соответствует стандартному винеровскому процессу. Стандартный винеровский процесс будем обозначать через  $W(t)$ .

Отметим известное свойство  $H$ -однородности дробного броуновского движения (см. [54]): для любого  $\lambda > 0$  конечномерные распределения случайных процессов  $\{B_H(\lambda t)\}$  и  $\{\lambda^H B_H(t)\}$  совпадают. Кроме того, случайный процесс  $B_H$  имеет стационарные приращения.

Определим гауссовский процесс:

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t - s) dM(s). \quad (121)$$

Процесс  $Z_t(M, H)$  в тех случаях, когда  $M$  степенная функция или же лестница Кантора  $C_q$ ,  $q < +\infty$ , обладает свойством статистической масштабной инвариантности (см. замечание 5.1). Заметим, что  $Z_t(p_0, H)$  совпадает с  $\sigma B_H(t)$ .

Через  $[t]$  в дальнейшем обозначается целая часть числа  $t$ .

**Теорема 5.2.** Пусть выполняется условие (H) и  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $2 < q < \infty$  и, кроме того,  $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$  для некоторого  $\alpha$ , такого что  $\alpha \geq 2$  и  $\alpha H > 1$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  выполняется сходимость по распределению:

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{|R_k(p_\nu)|}{n^{H+\nu}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|, \quad (122)$$

и

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[q^n t]}(C_q)|}{q^{n(H+d_q)}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(C_q, H)|,$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ .

**Замечание 5.1.** Пусть  $\lambda = q^l$ , где  $l$  — некоторое целое число и  $2 < q < \infty$ . В таком случае конечномерные распределения случайных процессов  $\{Z_{\lambda t}(C_q, H)\}$  и  $\{\lambda^{H+d_q} Z_t(C_q, H)\}$  совпадают. Этот факт является прямым следствием  $H$ -однородности фрактального броуновского движения, а также того, что  $C_q(q^l s) = q^{ld_q} C_q(s)$  при всех  $s \geq 0$  (см. (118)). Отметим, что статистическая масштабная инвариантность процесса  $Z_t(C_q, H)$  (как и масштабная инвариантность лестницы Кантора  $C_q$ ) имеет дискретный характер, поскольку выполняется при специфическом дискретном наборе  $\lambda = q^l$  (см. [40]). Если вместо  $C_q$  рассматривать степенную функцию  $p_\nu$ ,  $\nu \geq 0$ , в этом случае равенство конечномерных распределений процессов  $\{Z_{\lambda t}(p_\nu, H)\}$  и  $\{\lambda^{H+\nu} Z_t(p_\nu, H)\}$  выполняется для любой отличной от нуля постоянной  $\lambda$ , а не только для целых степеней  $q$ .

На теореме 5.2 основывается вычисление параметров нелокальности.

Пусть имеется  $L$  независимых, однородных экспериментов, в ре-

зультате которых получены выборки  $(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, L$  (мы предполагаем, что выборки центрированы). Найдем оценки  $k^*$  и  $\gamma^*$  параметров  $k$  и  $\gamma$  соответственно степенного изменения  $\langle R_n^2 \rangle \sim k^2 n^{2\gamma}$ . Вычислим выборочные вторые моменты

$$\overline{R_i^2} = \sum_{j=1}^L (R_i^{(j)})^2 / L, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что  $\overline{R_i^2}$  является оценкой для  $\langle R_i^2 \rangle$  (будем считать, что  $L \gg 1$ ). Оценки  $k^*$  и  $\gamma^*$  можно найти методом наименьших квадратов, рассмотрев линейную регрессию:  $\ln(\overline{R_i^2}) = 2 \ln k + 2\gamma \ln i + \varepsilon_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , где  $\varepsilon_i$  — случайные ошибки.

Используя  $k^*$  и  $\gamma^*$  найдем оценки параметров  $\nu$  и  $H$ . Напомним, что  $\sigma = k/s_{\nu, H}$  и  $\gamma = \nu + H$  (см. теорему 5.1).

На выборке  $(R_1^{(j)}, R_2^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, L$  вычислим значение  $r_j = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|R_i^{(j)}|}{n^{\gamma^*}}$ . Получим выборку  $(r_1, r_2, \dots, r_L)$ , пусть  $(r_{(1)}, r_{(2)}, \dots, r_{(L)})$  — соответствующий вариационный ряд, через  $\Psi_L^*$  обозначим выборочную функцию распределения.

Обозначим  $\Psi_{\nu, H}(z) = \mathbf{P}(\sup_{t \in [0, 1]} |Z_t(p_\nu, H)| < z)$ . Отметим, что  $\mathbf{P}(r_1 < z) \approx \Psi_{\nu, H}(z)$  (см. теорему 5.2).

Далее, рассмотрим вычисление значения  $\Psi_{\nu, H}(z)$ . Численно моделируя  $N \gg 1$  траекторий гауссовского процесса  $Z_t(p_\nu, H)$  (см. замечание 5.2), вычисляя на каждой траектории

$$s(\nu, H) = \sup_{t \in [0, 1]} |Z_t(p_\nu, H)| \quad (123)$$

и выделяя число  $N_0$  тех случаев, для которых  $s(\nu, H) < z$ , можно найти  $\Psi_{\nu, H}(z) \approx N_0/N$ .

Пара  $(\nu_L^*, H_L^*)$  ( $\nu_L^* + H_L^* = \gamma^*$ ), на которой достигается минимум расстояния Колмогорова  $\rho_L(\nu, H) = \sup_{|z| < +\infty} |\Psi_{\nu, H}(z) - \Psi_L^*(z)|$  является состоятельной оценкой неизвестных параметров  $(\nu, H)$  распределения  $\mathbf{P}(r_1 < z)$ . Значение  $\rho_L(\nu, H)$  вычисляется следующим образом (см., например, [5])

$$\max\left(\max_{1 \leq j \leq L} \left(\frac{j}{L} - \Psi_{\nu, H}(r_{(j)})\right), \max_{1 \leq j \leq L} \left(\Psi_{\nu, H}(r_{(j)}) - \frac{j-1}{L}\right)\right).$$

Значение  $\rho_L(\nu_L^*, H_L^*)$  является оценкой близости реального блуждания, определяемого выборкой, к модели блуждания со степенной памятью.

Отметим, что критерий адекватности модели по ее соответствию реальным данным, основанный на максимуме траекторий случайного блуждания использовался автором в совместной работе [62].

Проведем численное моделирование выборок  $(R_1^{(j)}, \dots, R_n^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, L$ , где  $L = 20$ ,  $n = 1000$ . При каждом  $j$  значение  $R_i^{(j)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  вычислим по формуле (113), в которой  $M = p_\nu$ , где  $\nu = 0.2$  и  $H = 0.3$ . Значение  $\sigma^2$  полагаем равным 1. Случайные величины  $(\xi_k)$  в условии (H) моделируем стандартными нормальными величинами.

Используя приведенные выше вычислительные процедуры, получаем  $\gamma^* = 0.45$ . В следующей таблице приведены пары  $(\nu, H)$  такие, что  $H + \nu = \gamma^*$ . Для каждой из этих пар вычислялось расстояние

Колмогорова  $\rho_L(\nu, H)$ .

$\nu$	0.05	0.09	0.14	0.18	0.22	0.27	0.32	0.36	0.41
$H$	0.40	0.36	0.31	0.27	0.23	0.18	0.13	0.09	0.04
$\rho(\nu, H)$	0.25	0.13	0.11	0.14	0.15	0.19	0.27	0.32	0.52

Из таблицы получаем, что  $(\nu_{20}^*, H_{20}^*) = (0.14, 0.31)$  и  $\rho_{20}(\nu_{20}^*, H_{20}^*) = 0.11$ . Отметим близость  $\nu_{20}^*, H_{20}^*$  к точным значениям  $\nu = 0.2, H = 0.3$ .

**Замечание 5.2.** Дробное броуновское движение  $B_H(t)$ ,  $H \neq 1/2$  имеет следующее интегральное представление  $\int_0^t K_H(t, s) dW(s)$  (см. [42]), в котором ядро имеет вид

$$K_H(t, s) = c_H(t - s)^{H-1/2} + c_H(1/2 - H) \int_s^t (u - s)^{H-3/2} (1 - (s/u)^{1/2-H}) du,$$

где  $c_H = \left( \frac{2H\Gamma(3/2-H)}{\Gamma(H+1/2)\Gamma(2-2H)} \right)^{1/2}$ , где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера. Для численного моделирования  $Z_t(M, H)$  можно использовать соответствующие дискретизации интегральных представлений  $Z_t(M, H)$  и  $B_H$ .

### 5.5 Предельная теорема в случае $H = 1/2$

Целью настоящего раздела является снижение в случае  $H = 1/2$  моментных ограничений на  $(\xi_k)$ .



Напомним обозначения. Пусть  $\{X_j; j \in \mathbb{Z}\}$  — стационарная последовательность случайных величин, имеющая представление в виде двустороннего скользящего среднего:

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k} \xi_k,$$

где  $\{\xi_k; k \in \mathbb{Z}\}$  — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями,  $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$  — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел. Введем следующее условие:

Пусть для некоторого натурального числа  $m$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}| &< \infty, \\ \sum_{i=1}^{\infty} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-im}| &< \infty, \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i &\neq 0. \end{aligned} \tag{124}$$

**Предложение 5.3.** *При выполнении условия (124) имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}S_n}{n} = \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \right)^2. \tag{125}$$

Через  $Z_t(M, H)$  мы по-прежнему обозначаем гауссовский процесс:

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s).$$

**Теорема 5.3.** Пусть выполняется условие (124). Тогда при  $n \rightarrow +\infty$  выполняется сходимость по распределению

$$\max_{1 \leq k \leq n} \frac{|R_k(p_\nu)|}{n^{1/2+\nu}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, 1/2)|, \quad (126)$$

где  $\sigma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ .

## 5.6 Случай правильно меняющейся функции памяти

Целью этой главы является изучение более широкого класса функций памяти, представленного классом правильно меняющихся функций. Отметим, что содержательные оценки близости случайного блуждания и предельного гауссовского процесса позволяют, в частности, получить закон изменения дисперсии для исходного случайного блуждания. Основными утверждениями этого раздела являются предложение 5.4 и следствие 5.2.

Через  $\mathcal{M}$  обозначим множество всех неубывающих и неотрицательных функций, определенных на промежутке  $[0, +\infty)$ , отличных от констант. Рассмотрим последовательность  $(R_n(M))_{n=0,1,\dots}$  (см. (113)):

$$R_n(M) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \Delta M(i), \quad n = 0, 1, \dots$$

Напомним также, что через  $Z_t(M, H)$  обозначается гауссовский

процесс (см. (121)):

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s).$$

Введем обозначения, связанные с исходными коэффициентами  $\{a_i\}$ :

$$A_m = a_0 + \cdots + a_m \text{ при } m \geq 0 \text{ и } A_{-1} = 0,$$

$$A_m = -(a_{m+1} + \cdots + a_{-1}) \text{ при } m < -1.$$

Наряду с последовательностью  $\{A_m\}$  нам понадобятся следующие обозначения, связанные с параметром  $H$ :

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (A_{n+m} - A_m - \sigma L_H^{-1/2} (n+m+1)^{H-1/2} + \\ &+ \sigma L_H^{-1/2} (m+1)^{H-1/2})^2; \end{aligned}$$

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{m=1}^n (A_{n-m} - A_{-m} - \sigma L_H^{-1/2} (n-m+1)^{H-1/2})^2;$$

$$\Delta_n^{(3)} = \sum_{m>n} (A_{n-m} - A_{-m})^2;$$

$$\Delta_n = \Delta_n^{(1)} + \Delta_n^{(2)} + \Delta_n^{(3)};$$

$$\Delta_{\alpha, n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \max\{|m|^{1/\alpha}, n^{1/\alpha}\} |a_{n+m} - a_m|,$$

где  $\sigma$  — положительная константа,  $H \in (0, 1)$  и  $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2 ds$ .

**Теорема 5.4.** Пусть  $M \in \mathcal{M}$ . Если  $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$  для некоторого

$\alpha > 2$ , то процессы  $R_{[t]}(M)$  и  $Z_t(M, H)$  можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при  $t \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M, H) = o(M(t)\Delta_{\alpha, [t]}) + O(M(t)\sqrt{(1 + \Delta_{[t]}) \log t}) \quad \text{n. н.},$$

где  $[t]$  — целая часть числа  $t$ .

Приведем менее общее условие, чем приведенное выше условие (Н) (см. (115)), на последовательность  $\{a_k\}$  (см. [67]):

(НН): Пусть последовательность  $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$  монотонна на каждой из полуосей  $k \leq -N$  и  $k \geq N$ , а также удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} |a_{-k}| + |a_k - \sigma(H - 1/2)L_H^{-1/2}k^{H-3/2}| &= O(k^{H-\delta-3/2}), \quad k \rightarrow +\infty; \\ |A_{-k}| + |A_k - \sigma L_H^{-1/2}k^{H-1/2}| &= O(k^{H-\delta-1/2}), \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (127)$$

где  $N \geq 1$ ,  $0 < H < 1$ ,  $0 < \delta < H$  и  $\sigma$  — положительная константа.

**Следствие 5.1.** Пусть выполняется условие теоремы 5.4 и условие (НН). Тогда  $R_{[t]}(M)$  и  $Z_t(M, H)$  можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при  $t \rightarrow \infty$  имеет место соотношение:

$$R_{[t]}(M) - Z_t(M, H) = o(M(t)t^{H'-1/2+1/\alpha}) + O(t^{H-\delta}M(t)\sqrt{\log t}) \quad \text{n. н.},$$

где  $H' = \max\{H, 1/2\}$ .

Через  $\mathcal{R}_\nu \subseteq \mathcal{M}$  обозначим класс правильно меняющихся функций с показателем  $\nu \geq 0$ , имеющих следующее представление:  $l(t)t^\nu$ , где  $l(t)$  — медленно меняющаяся на  $+\infty$  (см., например, [47]), неотрицательная и неубывающая функция на  $[0, +\infty)$  (считаем, что  $0^0 = 1$ ).

**Предложение 5.4.** Пусть  $M \in \mathcal{R}_\nu$ ,  $\nu > 0$ . Тогда при  $t \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$\langle Z_t^2(M, H) \rangle \sim \sigma^2 s_{\nu, H}^2 M^2(t) t^{2H}, \quad (128)$$

где  $s_{\nu, H}^2 = \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) u^{\nu-1} v^{\nu-1} dudv$ .

Если  $M \in \mathcal{R}_0$ , то при  $t \rightarrow \infty$  имеет место соотношение:

$$\langle Z_t^2(M, H) \rangle \sim \sigma^2 \left( 1 - \frac{M(0)}{M(+\infty)} \right)^2 M^2(t) t^{2H}. \quad (129)$$

Из предложения 5.4 и следствия 5.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 5.2.** Пусть выполняется условие (НН) и  $M \in \mathcal{R}_\nu$ . Тогда имеет место соотношение:

$$\langle R_n^2(M) \rangle \sim \langle Z_n^2(M, H) \rangle, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отметим, что в следствии 5.2 условие (НН), представляющее локальные условия на коэффициенты  $\{a_k\}$ , может быть заменено на менее ограничительное интегральное условие (116) (см. [77]).

**Замечание 5.3.** Будем говорить о *содержательных* оценках близости процессов  $R_n(M)$  и  $Z_n(M, H)$  в случае, когда при  $n \rightarrow \infty$

выполняется соотношение

$$R_n(M) - Z_n(M, H) = o(\sqrt{\langle Z_n^2(M, H) \rangle}) \text{ п. н.} \quad (130)$$

В частности, если в следствии 5.1 функция  $M \in \mathcal{R}_\nu$  при некотором  $\nu \geq 0$ , то, в соответствии с предложением 5.4, можно говорить о содержательных оценках близости процессов (рассматриваемых в следствии 5.1) при таком моментном ограничении:  $\alpha > \max(2, 1/H)$ .

### 5.7 Физический смысл параметров нелокальности

Напомним, что аномальность блуждания  $R_n(p_0)$  (и  $R_n(C_\infty)$ ) определяется нелокальностью воздействия среды на частицу (см. раздел 5.3), при этом процесс блуждания  $R_n(p_0)$  имеет «притяжение» к дробному броуновскому движению (см. теорему 5.2). Отметим, что если память о предыдущих воздействиях  $\Delta M(i)$  убывает достаточно быстро (см. предложение 5.4), то аномальность по-прежнему определяется нелокальностью воздействия среды. Показатель  $H$  — это классический показатель Хёрста, отвечающий за геометрические свойства среды, отметим, что  $H = 2 - D$ , где  $D$  размерность Хаусдорфа траекторий дробного броуновского движения (см., например, [36]).

Параметр  $\nu$ ,  $\nu \in (0, 1)$  в случае формирования памяти по степенной функции  $p_\nu$  отвечает в текущий момент времени за степенную  $\Delta p_\nu(i) \sim \frac{\nu}{i^{1-\nu}}$  скорость убывания информации о предыдущих воз-

действиях, участвующих в формировании блуждания  $R_n(p_\nu)$  (см. раздел 5.3). Из предложения 5.4 вытекает промежуточный случай в определении режима блуждания. Скажем, в случае  $M(t) = \frac{\ln(t+1)}{\ln 2}$ , второй момент блуждания  $R_n(M)$  ведет себя как  $n^{2H} \ln^2 n$  при  $n \rightarrow +\infty$ .

Параметр  $d_q$  в случае формирования памяти по лестнице Кантора  $C_q$  в текущий момент времени характеризует долю информации о предыдущих воздействиях, участвующих в формировании блуждания  $R_n(C_q)$  (см. [25]).

Отметим крайние случаи. В случае  $\nu = 0$  ( $q = \infty$ ,  $d_q = 0$ ) речь идет о полной потере информации и предыдущих воздействиях, если же  $\nu = 1$  ( $q = 2$ ,  $d_q = 1$ ), то информация о предыстории полностью сохраняется.

Отметим также, что параметры памяти  $\nu$  и  $d_q$  определяют нестационарность скоростей процесса блуждания  $R_n$ . Действительно, если  $\nu = 0$  ( $d_q = 0$ ), то  $v(k\tau) = X_k$ ,  $k \geq 1$  — стационарная последовательность, в противном случае стационарность скоростей нарушается.

### 5.8 Доказательство утверждений

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.1. Прежде всего из (118) следует, что для вещественных аргументов вида  $z = \sum_{i=-\infty}^M b_i q^i$ , где каждое  $b_i$  равно либо 0, либо  $q - 1$ , значение  $C_q(z)$  представляется в виде  $\sum_{i=-\infty}^M a_i 2^i$ , где  $a_i = b_i / (q - 1)$ .

Произвольное целое положительное число  $h$  представим в двоичной системе счисления в виде

$$h = \sum_{k=i}^j a_k 2^k, \quad (131)$$

где  $0 \leq i \leq j$  и  $a_i = a_j = 1$ . Число  $h$  допускает представление

$$h = \sum_{k=i+1}^j a_k 2^k + \sum_{k=-\infty}^{i-1} 2^k. \quad (132)$$

Обозначим  $\Delta_L(h) = (q - 1)(\sum_{k=i+1}^j a_k q^k) + (q - 1) \sum_{k=-\infty}^{i-1} q^k$  и  $\Delta_R(h) = (q - 1)(\sum_{k=i}^j a_k q^k)$ . Стало быть,  $C_q(\Delta_L(h)) = C_q(\Delta_R(h)) = h$ . Следовательно,

$$C_q^{-1}(h) = [\Delta_L(h), \Delta_R(h)], \quad (133)$$

где левому концу интервала соответствует представление (132), а правому — представление (131). Преобразовав (133), получим

$$C_q^{-1}(h) = [(q-1)(\sum_{k=i+1}^j a_k q^k) + q^i, (q-1)(\sum_{k=i+1}^j a_k q^k) + (q-1)q^i]. \quad (134)$$



Докажем, что

$$\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1. \quad (135)$$

Рассмотрим несколько случаев. Пусть  $i \geq 1$  в (131). Тогда  $h+1 = \sum_{k=0}^j c_k 2^k$ , где  $c_0 = 1$ ,  $c_k = a_k$  при всех  $i \leq k \leq j$  и  $c_k = 0$  при всех  $1 \leq k \leq i-1$ . Воспользовавшись (134), заменив при этом двоичное представление  $h$  (см. (131)) на представление числа  $h+1$ , получим  $\Delta_L(h+1) = (q-1)(\sum_{k=1}^j c_k q^k) + 1 = (q-1)(\sum_{k=i}^j a_k q^k) + 1$ . Стало быть,  $\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1$  (см. (133)).

Пусть теперь в (131) значение  $i = 0$  и  $a_i = a_{i+1} = \dots = a_j = 1$ . Тогда  $h+1 = 2^{j+1}$ . Используя соотношение (134) с точностью до замены в нем представления  $h$  на  $h+1$ , выводим  $\Delta_L(h+1) = q^{j+1} = (q-1)(q^j + \dots + q + 1) + 1 = \Delta_R(h) + 1$  (см. (133)).

Перейдем к заключительному случаю. Пусть в (131) значение  $i = 0$  и существует  $m$ , такое что  $0 < m < j$  и  $a_m = 0$ , рассмотрим минимальное такое  $m$ . Тогда  $h+1 = \sum_{k=m}^j c_k 2^k$ , где  $c_m = 1$  и  $c_k = a_k$  при всех  $k \geq m+1$ . Опять же, используя (134), заменив в нем представление  $h$  на  $h+1$ , получаем  $\Delta_L(h+1) = (q-1)(\sum_{k=m+1}^j a_k q^k) + q^m = (q-1)(\sum_{k=m+1}^j a_k q^k + q^{m-1} + \dots + 1) + 1$ . В итоге мы снова получили равенство  $\Delta_L(h+1) = \Delta_R(h) + 1$  (см. (133)). Тем самым, равенство (135) доказано.

Заметим, что  $C_q^{-1}(0) = 0$  и  $C_q^{-1}(1) = [1, q-1]$ . Подводя итог, мы получаем, что объединение  $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_q^{-1}(i)$  совпадает с множеством

всех целых неотрицательных чисел. Следовательно, любые два последовательных целых числа  $i$  и  $i + 1$  либо попадут в один интервал  $C_q^{-1}(k)$  при некотором  $k$ , либо в два соседних. Поэтому для любых  $i \geq 0$  выполняется одно из равенств:  $C_q(i + 1) - C_q(i) = 0$ , либо  $C_q(i + 1) - C_q(i) = 1$ .

Далее, если  $N$  — произвольное сколь угодно большое число, то найдется  $i$ , такое что любое число из объединения  $C_q^{-1}(i) \cup C_q^{-1}(i + 1) \cup \dots$  превосходит  $N$ , откуда следует утверждение второй части предложения.

Доказательство предложения 5.2 мы разобьем на следующие леммы 5.1—5.6. Введем обозначение:  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  при  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ . В качестве леммы 5.1 приведем утверждение из [2, следствие 1] (поскольку выполняется условие (Н) для последовательности  $(a_k)$ , в этом утверждении необходимо взять  $g \equiv 1$  и  $\max\{\beta, \gamma\} < H' - 1/2 + 1/\alpha$ ).

**Лемма 5.1.** *Пусть выполняется условие предложения 5.2, тогда случайное блуждание  $S_{[t]}$  и процесс  $B_H(t)$ , можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при  $t \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:*

$$S_{[t]} - \sigma B_H(t) = o(t^{H' - 1/2 + 1/\alpha}) \text{ п. н.},$$

где  $H' = \max\{H, 1/2\}$ .

**Лемма 5.2.** *Пусть выполняется условие предложения 5.2, тогда*

при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) = o(M(n)n^H) \text{ п. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя порядок суммирования в (113), представим  $R_n(M)$  в виде  $\sum_{i=0}^n S_{n-i} \Delta M(i)$ , откуда получаем представление  $R_n(M)$  в виде интеграла:  $\int_0^n S_{n-[s]} dM(s)$ . Воспользовавшись этим представлением, выводим неравенство:

$$|R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \sigma B_H(k)| M(n).$$

Далее, используя лемму 5.1, получаем утверждение леммы.

Приведем следующее утверждение из [23], которое потребуется для доказательства леммы 5.4.

**Лемма 5.3.** Пусть  $\{\xi(t); 0 \leq t \leq 1\}$  — центрированный гауссовский процесс, причем  $\xi(0) = 0$  и  $\langle (\xi(t) - \xi(s))^2 \rangle \leq C|t - s|^\alpha$  для некоторого  $\alpha > 0$ . Тогда для всех  $y \geq 0$

$$\mathbf{P}(\sup_{t \in [0,1]} |\xi(t)| > y) \leq 4 \exp(-C_\alpha y^2 C^{-1}),$$

где  $C_\alpha$  — положительная константа, зависящая только от  $\alpha$ .

**Лемма 5.4.** При  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$\sup_{|t-s| \leq 1, t, s \in [0, n]} |B_H(t) - B_H(s)| = O(\sqrt{\ln n}) \text{ п. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что  $s$  и  $t$  лежат в интервалах вида

$[i, i + 1]$ ,  $0 \leq i < n$  и если  $|s - t| \leq 1$ , то эти интервалы либо совпадают, либо примыкают друг к другу. Поэтому для событий

$$A_t = \left\{ \sup_{t \leq s \leq t+1} |B_H(s) - B_H(t)| > y/3 \right\},$$

где  $y > 0$  — произвольное действительное число, выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|t-s| \leq 1} |B_H(t) - B_H(s)| > y\right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i < n} A_i\right). \quad (136)$$

Используя стационарность приращений процесса  $B_H$ , получаем, что

$$\mathbf{P}(A_t) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > y/3\right).$$

Следовательно, из (136) вытекает неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sup_{|t-s| \leq 1} |B_H(t) - B_H(s)| > y\right) \leq n\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > y/3\right). \quad (137)$$

Далее, заметим, что  $\langle (B_H(t) - B_H(s))^2 \rangle = \langle B_H^2(t - s) \rangle = |t - s|^{2H}$ .

Применяя к правой части неравенства (137) лемму 5.3, с учетом того, что  $\alpha = 2H$  и  $C = 1$ , а также, положив  $y = 3\sqrt{3 \ln n / C_{2H}}$ , получаем

$$n\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_H(s)| > \sqrt{3 \ln n / C_{2H}}\right) \leq 4/n^2. \quad (138)$$

Используя известную лемму Бореля-Кантелли, получаем, что с ве-

роятностью 1 происходит лишь конечное число событий

$$\left( \sup_{|t-s| \leq 1, t, s \in [0, n]} |B_H(t) - B_H(s)| > 3\sqrt{3 \ln n / C_{2H}} \right)_{n \geq 1}.$$

Откуда получаем утверждение леммы.

**Лемма 5.5.** *При  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение:*

$$\int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) - \int_0^n B_H(n - s) dM(s) = O(M(n)\sqrt{\ln n}) \text{ н. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq s \leq n} \left| \int_0^n B_H(n - s) dM(s) - \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) \right| \\ & \leq \sup_{|t-s| \leq 1, t, s \in [0, n]} |B_H(t) - B_H(s)| M(n). \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 5.4, получаем утверждение леммы 5.5.

**Лемма 5.6.** *При  $t \rightarrow \infty$  выполняется равенство:*

$$\left| \int_0^t B_H(t - s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t] - s) dM(s) \right| = O(M(t)\sqrt{\ln t}) \text{ н. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего имеет место неравенство:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t B_H(t-s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) \right| \\
& \leq \int_0^{[t]} |B_H(t-s) - B_H([t]-s)| dM(s) \\
& + \int_{[t]}^t |B_H(t-s)| dM(s) \\
& \leq 2 \sup_{|u-v| \leq 1, u, v \in [0, t]} |B_H(u) - B_H(v)| M(t).
\end{aligned} \tag{139}$$

Применяя лемму 5.4, получаем утверждение леммы 5.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.2. Выполняется следующее очевидное неравенство

$$\begin{aligned}
& |R_{[t]}(M) - Z_t(M, H)| \\
& \leq |R_{[t]}(M) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s)| \\
& + |\sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s)| \\
& + |\sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-s) dM(s) - \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s)|.
\end{aligned} \tag{140}$$

Применяя леммы 5.2, 5.5 и 5.6 соответственно к первому, второму и третьему слагаемому правой части (140), получаем утверждение предложения.

**Лемма 5.7.** Для любого  $t \geq 0$  выполняется равенство:

$$\langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle = \sigma^2 s_{\nu, H}^2 t^{2\nu+2H},$$

$$2de s_{\nu, H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для начала  $\nu > 0$ . Выполняется следующее равенство:

$$\langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r) B_H(t-s) \rangle dr^\nu ds^\nu. \quad (141)$$

Из (120) и (141) следует, что

$$\begin{aligned} \langle Z_t^2(p_\nu, H) \rangle &= \\ &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - |r-s|^{2H}}{2} dr^\nu ds^\nu. \end{aligned} \quad (142)$$

Сделав в (142) замену  $r = tu$  и  $s = tv$ , мы сразу получим утверждение леммы.

Пусть теперь  $\nu = 0$ . Очевидно, что процесс  $Z_t(p_0, H)$  совпадает с  $\sigma B_H(t)$ . Учитывая, что  $s_{0, H}^2 = 1$  и  $\langle B_H^2(t) \rangle = t^{2H}$ , получаем утверждение леммы и в этом случае.

Отметим, что функция  $C_q$ ,  $2 \leq q < \infty$  имеет степенные огибающие.

**Лемма 5.8.** *Для каждого  $2 \leq q < \infty$  имеют место неравенства:*

$$t^{d_q}/(q-1)^{d_q} \leq C_q(t) \leq t^{d_q}, \quad t \geq 0, \quad (143)$$

где  $d_q = \ln 2 / \ln q$ .

Заметим, что в лемме 5.8 оба неравенства точные. Левое неравенство достигается при  $t$ , имеющих вид  $(q-1)q^m$ , соответственно

правое — при  $q^m$ , где  $m$  — целое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.8. В работе [11] неравенство (143) доказывается для всех  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим некоторое  $t > 1$ . Тогда существует целое  $m > 1$ , такое что  $t \in [q^m, q^{m+1}]$ . Из определения продолжения  $C_q$  на всю положительную полуось следует, что  $C_q(t) = 2^{m+1}C_q(t/q^{m+1})$ . Значение  $t/q^{m+1} \in [0, 1]$ , поэтому для  $C_q(t/q^{m+1})$  выполняется (143), а именно:

$$\frac{t^{d_q}}{2^{m+1}(q-1)^{d_q}} \leq C_q(t/q^{m+1}) \leq \frac{t^{d_q}}{2^{m+1}}.$$

Откуда сразу получаем, что  $C_q(t)$ , действительно, удовлетворяет (143).

**Лемма 5.9.** Пусть  $2 \leq q < \infty$ . Тогда для любого целого  $n$  имеет место равенство:

$$\langle Z_{q^n}^2(C_q, H) \rangle = \sigma^2 c_{q,H}^2 q^{n(2d_q+2H)},$$

где  $c_{q,H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dC_q(u) dC_q(v)$ .

Кроме того, при  $t \rightarrow \infty$

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \asymp t^{2d_q+2H}. \quad (144)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место следующее равенство:

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r) B_H(t-s) \rangle dC_q(r) dC_q(s). \quad (145)$$



Из (120) и (145) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \\ &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - |r-s|^{2H}}{2} dC_q(r) dC_q(s). \end{aligned} \quad (146)$$

Положив в (146) значение  $t$  равным  $q^n$  и сделав замену  $r = q^n u$  и  $s = q^n v$ , принимая во внимание, что  $C_q(r) = q^{nd_q} C_q(u)$  и  $C_q(s) = q^{nd_q} C_q(v)$ , мы получим утверждение первой части леммы.

Из (146) вытекает неравенство:

$$\begin{aligned} & \langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \\ & \geq \sigma^2 \int_0^t \int_0^s \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - (s-r)^{2H}}{2} dC_q(r) dC_q(s). \end{aligned} \quad (147)$$

Уменьшая правую часть (147), получаем

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \geq \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{2H} dC_q(r) dC_q(s). \quad (148)$$

Преобразовывая правую часть (148), а также интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{2H} dC_q(r) dC_q(s) = \frac{\sigma^2}{4} \int_0^t (t-s)^{2H} dC_q^2(s) \\ &= \frac{H\sigma^2}{2} \int_0^t C_q^2(s) (t-s)^{2H-1} ds. \end{aligned} \quad (149)$$

Далее, применяя лемму 5.8 к правой части последнего равенства в (149), получаем нижнюю оценку

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \geq ct^{2H+2d_q}, \quad (150)$$

где  $c = \frac{H\sigma^2}{2(q-1)^{2d_q}} \int_0^1 u^{2d_q}(1-u)^{2H-1} du$ .

Получим теперь верхнюю оценку. Применяя неравенство Гельдера к правой части (145), выводим

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r)B_H(t-s) \rangle dC_q(r)dC_q(s) \\ & \leq \sigma^2 \left( \int_0^t (t-s)^H dC_q(s) \right)^2. \end{aligned} \quad (151)$$

Интегрируя по частям в правой части (151), получаем

$$\left( \int_0^t (t-s)^H dC_q(s) \right)^2 = H^2 \left( \int_0^t (t-s)^{H-1} C_q(s) ds \right)^2. \quad (152)$$

И наконец, применяя лемму 5.8 к правой части равенства (152), получаем верхнюю оценку

$$\langle Z_t^2(C_q, H) \rangle \leq Ct^{2H+2d_q}, \quad (153)$$

где  $C = H^2\sigma^2 \left( \int_0^1 u^{d_q}(1-u)^{H-1} du \right)^2$ .

Из (150) и (153) получаем (144).

**Лемма 5.10.** Пусть  $(R_n)$  и  $(Z_n)$  — заданные на одном вероятностном пространстве последовательности нормальных случайных величин, такие что при  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение

$$R_n - Z_n = o(\sqrt{\langle Z_n^2 \rangle}) \text{ п. н.}$$

Тогда при  $n \rightarrow \infty$  выполняется эквивалентность

$$\langle R_n^2 \rangle \sim \langle Z_n^2 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что, во-первых, при  $n \rightarrow \infty$  распределения случайных величин  $R_n/\sqrt{\langle Z_n^2 \rangle}$  слабо сходятся к стандартному нормальному закону, а во-вторых, случайная величина  $R_n/\sqrt{\langle R_n^2 \rangle}$  при всех  $n$  имеет стандартное нормальное распределение, откуда и вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Прежде всего можно изначально считать, что случайные величины  $(\xi_k)$ , по которым строится последовательность  $R_n(M)$ , являются стандартными нормальными, поскольку это не влияет на величину  $\langle R_n^2(M) \rangle$  (напомним, что функция  $M$  является либо степенной функцией  $p_\nu$ , либо лестницей Кантора  $C_q$ ). Нормальные величины обладают всеми абсолютными моментами положительного порядка, стало быть, в предложении 5.2 мы можем считать, что  $\alpha > 2 + 1/H$ . Далее, из предложения 5.2 и леммы 5.7 следует, что при  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение  $R_n(M) - Z_n(M, H) = o(\sqrt{\langle Z_n^2(M, H) \rangle})$  п. н. Следовательно, из леммы 5.10 выводим  $\langle R_n^2(M) \rangle \sim \langle Z_n^2(M, H) \rangle$ . Применяя лемму 5.7 к правой части полученного асимптотического соотношения, получаем первую часть утверждения теоремы. Аналогично доказывается вторая часть теоремы, для этого достаточно вместо леммы 5.7 применить лемму 5.9 и заменить  $n$  на  $q^n$  и  $p_\nu$  на  $C_q$ .

### 5.8.1 Доказательство теоремы 5.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Из предложения 5.2 следует, что существует вероятностное пространство, на котором при  $t \rightarrow \infty$

$$R_{[t]}(p_\nu) - Z_t(p_\nu, H) = o(t^{H+\nu}) \text{ п. н.} \quad (154)$$

Следовательно, из (154) получаем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} |R_{[nt]}(p_\nu) - Z_{nt}(p_\nu, H)| = o(n^{H+\nu}) \text{ п. н.} \quad (155)$$

Из (155) выводим, что при  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{R_{[nt]}(p_\nu)}{n^{\nu+H}} - \frac{Z_{nt}(p_\nu, H)}{n^{\nu+H}} \right| = o(1) \text{ п. н.} \quad (156)$$

Далее, заметим, что  $\frac{Z_{nt}(p_\nu, H)}{n^{\nu+H}} \stackrel{d}{=} Z_t(p_\nu, H)$ , где равенство по распределению в этом соотношении подразумевается в пространстве  $C[0, 1]$  с равномерной метрикой (см. замечание 5.1). Поскольку функция  $h(x) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$  является непрерывной на  $C[0, 1]$ , поэтому

$$\sup_{t \in [0,1]} |Z_{nt}(p_\nu, H)|/n^{\nu+H} \stackrel{d}{=} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|. \quad (157)$$

Используя соотношения (156) и (157), применив теорему 4.1 из [4], получаем

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[nt]}(p_\nu)|}{n^{\nu+H}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|.$$

Аналогично, с точностью до замены  $n$  на  $q^n$  и  $p_\nu$  на  $C_q$ , доказывается вторая часть теоремы.

### 5.8.2 Доказательство утверждений раздела 5.5

Дисперсию  $\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$  случайной величины  $X$  будем обозначать через  $\mathbf{D}X$ .

**Предложение 5.5.** *Пусть выполняется условие (124). Тогда имеет место  $C$ -сходимость распределений процесса  $S_{[nt]}/\sqrt{n}$ ,  $t \in [0, 1]$  к распределениям процесса  $\sigma W(t)$ , где  $\sigma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$ .*

Обозначим процесс  $S_{[nt]}/\sqrt{n}$  через  $S_n(t)$ . Заметим, что существование двух моментов последовательности  $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  и условие (125), доказываемое в предложении 5.3, гарантируют сходимость конечномерных распределений процессов  $S_n(\cdot)$  к конечномерным распределениям процесса  $\sigma W(\cdot)$  (см. [12]). Поэтому для доказательства  $C$ -сходимости процесса  $S_n(\cdot)$  к процессу  $\sigma W(\cdot)$  остается проверить условие плотности семейства распределений процессов  $S_n(\cdot)$  в  $D[0, 1]$  относительно равномерной метрики. Итак, утверждение предложения 5.5 будет следовать из нижеследующей леммы 5.11.

**Лемма 5.11.** *Пусть для некоторого натурального числа  $m$*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}| < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-im}| < \infty.$$

*Тогда имеет место плотность семейства распределений процессов  $S_{[nt]}/n^H$ ,  $t \in [0, 1]$  в  $D[0, 1]$  относительно равномерной метрики.*

Прежде чем перейти к доказательству леммы 5.11 докажем ряд вспомогательных утверждений. Для случайной величины  $\xi_i$  опре-

делим центрированную срезку и соответственно центрированный “хвост” срезки на уровне  $N > 0$ :

$$\bar{\xi}_i^N = \xi_i I_{\{|\xi_i| \leq N\}} - \langle \xi_i I_{\{|\xi_i| \leq N\}} \rangle, \quad \hat{\xi}_i^N = \xi_i I_{\{|\xi_i| > N\}} - \langle \xi_i I_{\{|\xi_i| > N\}} \rangle.$$

Очевидно, выполняется равенство  $\xi_i = \bar{\xi}_i^N + \hat{\xi}_i^N$  для всех  $i \in \mathbb{Z}$ . Соответствующие нормированные процессы частных сумм скользящих средних, построенные по последовательностям  $\{\bar{\xi}_i^N\}_{i \in \mathbb{Z}}$  и  $\{\hat{\xi}_i^N\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , обозначим через  $\bar{S}_n^N(\cdot)$  и  $\hat{S}_n^N(\cdot)$  соответственно. Очевидно, для всех  $t \in [0, 1]$  выполняется равенство

$$S_n(t) = \bar{S}_n^N(t) + \hat{S}_n^N(t). \quad (158)$$

Для того чтобы проверить условия плотности семейства распределений процессов  $S_n(\cdot)$  в  $D[0, 1]$  относительно равномерной метрики, достаточно показать, что для любого положительного  $\varepsilon$  выполняется соотношение (см. [6, стр. 51], [4], [10])

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0, 1]} |S_n(t) - S_n(s)| > \varepsilon \right) = 0. \quad (159)$$

В силу (158) получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0,1]} |S_n(t) - S_n(s)| > \varepsilon \right) \\
& \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{|t-s| < \delta, t, s \in [0,1]} |\bar{S}_n^N(t) - \bar{S}_n^N(s)| > \varepsilon/2 \right) \quad (160) \\
& + \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\hat{S}_n^N(t)| > \varepsilon/4 \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (160) равно 0. Это следует из того что семейство распределений процессов  $\bar{S}_n^N(\cdot)$ , построенных по ограниченной последовательности  $\{\bar{\xi}_i^N\}_{i \in \mathbb{Z}}$  плотно (см., например, [12]). Поэтому достаточно показать, что для любого положительного  $\varepsilon$  имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\hat{S}_n^N(t)| > \varepsilon \right) = 0. \quad (161)$$

В леммах 5.12 – 5.15 будем предполагать, что  $m$  — некоторое натуральное число,  $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с условиями  $\langle \eta_1 \rangle = 0$  и  $\mathbf{D}\eta_1 < \infty$ .

**Лемма 5.12.** Пусть последовательность  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  удовлетворяет условию

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2 < \infty. \text{ Обозначим } Y_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \eta_{j-i} \text{ и } S_k = \sum_{j=1}^k Y_j, \quad k =$$

1, 2, .... Тогда выполняется неравенство

$$\mathbf{P} \left( \max_{k \leq n/m} \frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > \varepsilon \right) \leq \frac{4}{m\varepsilon^2} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i| \right)^2 \mathbf{D}\eta_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место равенство

$$S_k = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \eta_{j-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \sum_{j=1}^k \eta_{j-i}.$$

Далее, используя неравенство треугольника, а также неравенство Чебышева, получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \max_{k \leq n/m} \frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > \varepsilon \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i| \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-i} \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \left\langle \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i| \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-i} \right| \right)^2 \right\rangle \\ & \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \left\langle \sum_{l, m \in \mathbb{Z}} |b_l| |b_m| \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-l} \right| \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-m} \right| \right\rangle. \end{aligned} \tag{162}$$

Далее воспользуемся следующим неравенством (см. [41]):

$$\left\langle \max_{k \leq n} \left( \sum_{j=1}^k \zeta_j \right)^2 \right\rangle \leq 4 \sum_{j=1}^n \mathbf{D}\zeta_j,$$

где  $\{\zeta_j\}$  — последовательность независимых случайных величин с условиями  $\langle \zeta_j \rangle = 0$  и  $\mathbf{D}\zeta_j < \infty$ . Применяя неравенство Гёльдера и



предыдущее неравенство, получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n/m} \frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > \varepsilon\right) \\
& \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{l, m \in \mathbb{Z}} |b_l| |b_m| \left(\langle \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-l} \right|^2 \rangle\right)^{1/2} \left(\langle \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{j=1}^k \eta_{j-m} \right|^2 \rangle\right)^{1/2} \\
& \leq \frac{4}{m\varepsilon^2} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i|\right)^2 \mathbf{D}\eta_0.
\end{aligned} \tag{163}$$

Лемма доказана.

Пусть  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$  при  $k \geq 1$  и  $A_0 = 0$ , а также  $B_k = \sum_{i=1}^k a_{-i}$  при  $k \geq 1$  и  $B_0 = 0$ . В терминах этих обозначений выполняется равенство

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^n A_{n-j} \xi_j + \sum_{j=0}^{\infty} (A_{n+j} - A_j) \xi_{-j} \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1} (a_0 + B_j) \xi_{j+1} + \sum_{j=n}^{\infty} (B_j - B_{j-n}) \xi_{j+1}.
\end{aligned} \tag{164}$$

**Лемма 5.13.** *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{km} A_{km-j} \eta_j &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k A_{km-im} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \eta_j + \frac{\gamma_{1k}^m}{\sqrt{n}}, \\
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+im} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} + \frac{\gamma_{2k}^m}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

где  $\gamma_{1k}^m$  и  $\gamma_{2k}^m$  — случайные величины, обладающие свойством

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{ik}^m| > \varepsilon\right) \leq \frac{4m}{\varepsilon^2} \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2, \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{km} A_{km-j} \eta_j = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} A_{km-j} \eta_j.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} A_{km-j} \eta_j \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} A_{km-(i+1)m} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \eta_j + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} (A_{km-j} - A_{km-(i+1)m}) \eta_j \quad (165) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} A_{km-(i+1)m} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \eta_j + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \eta_j \sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно последнее слагаемое правой части (165), обо-

значив его через  $\gamma_{1k}^m$ . Оценим  $\mathbf{D}\gamma_{1k}^m$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \eta_j \sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l \right) \\
&= \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \left( \sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l \right)^2 \\
&\leq m\mathbf{D}\eta_1 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m} \sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l^2 \\
&\leq m^2\mathbf{D}\eta_1 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-im-1} a_l^2 \leq m^2\mathbf{D}\eta_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2.
\end{aligned} \tag{166}$$

Стало быть,

$$\mathbf{D}\gamma_{1k}^m \leq m^2\mathbf{D}\eta_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2. \tag{167}$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{1k}^m| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2} \max_{k \leq n/m} \mathbf{D}\gamma_{1k}^m. \tag{168}$$

Применяя неравенство (167) к оценке правой части (168), получаем первое утверждение леммы. Докажем, что имеет место второе

представление. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} (A_{km+j} - A_j) \eta_{-j} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} (A_{km+j} - A_j) \eta_{-j} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+ki} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} + \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} \sum_{l=km+im+1}^{km+j} a_l \right) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} \sum_{l=im+1}^j a_l \right).
\end{aligned} \tag{169}$$

Обозначим через  $\gamma_{2k}^m$  последние два слагаемых правой части (169), т. е.

$$\gamma_{2k}^m = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} \sum_{l=km+im+1}^{km+j} a_l \right) - \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{-j} \sum_{l=im+1}^j a_l \right).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{D}\gamma_{2k}^m \leq 2\mathbf{D}\eta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \left( \sum_{l=km+im+1}^{km+j} a_l \right)^2 + \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \left( \sum_{l=im+1}^j a_l \right)^2 \right). \tag{170}$$

Далее, проводя аналогичные (166) вычисления, получаем

$$\mathbf{D}\gamma_{2k}^m \leq 4m^2 \mathbf{D}\eta_0 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2.$$

Используя последнее неравенство, а также соотношение

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{2k}^m| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2} \max_{k \leq n/m} \mathbf{D}\gamma_{2k}^m,$$

получаем второе утверждение леммы.

**Лемма 5.14.** *Имеют место следующие два представления:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{km-1} (a_0 + B_j) \eta_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{j+1} + \frac{\gamma_{3k}^m}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=km}^{\infty} (B_j - B_{j-km}) \eta_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{j+1} + \frac{\gamma_{4k}^m}{\sqrt{n}},$$

где  $\gamma_{3k}^m$  и  $\gamma_{4k}^m$  — случайные величины, для которых

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{ik}^m| > \varepsilon \right) \leq \frac{4m}{\varepsilon^2} \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2, \quad i = 3, 4.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} (a_0 + B_j) \eta_{j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} (a_0 + B_{im}) \eta_{j+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=im+1}^j a_{-l}. \end{aligned} \quad (171)$$

Обозначим последнее слагаемое правой части (171) через  $\gamma_{3k}^m$ , т. е.

$$\gamma_{3k}^m = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=im+1}^j a_{-l}.$$

Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\gamma_{3k}^m &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \left( \sum_{l=im+1}^j a_{-l} \right)^2 \mathbf{D}\eta_1 \\ &\leq m^2 \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=im+1}^{(i+1)m-1} a_{-j}^2 \leq m^2 \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2. \end{aligned} \quad (172)$$

Оценивая с помощью (172) правую часть неравенства

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{3k}^m| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2} \max_{k \leq n/m} \mathbf{D}\gamma_{3k}^m,$$

получаем первое утверждение леммы. Чтобы получить второе утверждение, воспользуемся следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \sum_{j=km}^{\infty} (B_j - B_{j-km}) \eta_{j+1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} (B_j - B_{j-km}) \eta_{j+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (B_{km+im} - B_{im}) \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} \eta_{j+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=km+im+1}^j a_{-l} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=im+1}^{j-km} a_{-l}. \end{aligned} \quad (173)$$

Через  $\gamma_{4k}^m$  обозначим последние два слагаемых правой части (173),

т. е.

$$\gamma_{4k}^m = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=km+im+1}^j a_{-l} - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1} \eta_{j+1} \sum_{l=im+1}^{j-km} a_{-l}.$$

Проводя вычисления аналогичные (170), получаем

$$\mathbf{D}\gamma_{4k}^m \leq 4m^2 \mathbf{D}\eta_1 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2. \quad (174)$$

Применяя (174) и следующее неравенство

$$\mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} |\gamma_{4k}^m| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2} \max_{k \leq n/m} \mathbf{D}\gamma_{4k}^m,$$

получаем второе утверждение.

**Лемма 5.15.** *Выполняются следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/2 \right) \\ & + \mathbf{D}\eta_0 \frac{8m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2, \end{aligned} \quad (175)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i) \eta_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i - B_{i-k}) \eta_{i+1} \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{km-1} (a_0 + B_i) \eta_{i+1} + \sum_{i=km}^{\infty} (B_i - B_{i-km}) \eta_{i+1} \right| > \varepsilon/2 \right) \\ & + \mathbf{D}\eta_0 \frac{8m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2. \end{aligned} \quad (176)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Докажем (175). Очевидно, выполняется следу-

ющее соотношение:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \eta_i \right| > \varepsilon\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0 \leq r \leq m-1} \max_{k \leq (n-r)/m} \left| \sum_{i=1}^{km+r} A_{km+r-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_i) \eta_i \right| > \varepsilon\right) \\
&\leq m \max_{0 \leq r \leq m-1} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq (n-r)/m} \left| \sum_{i=1}^{km+r} A_{km+r-i} \eta_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon\right).
\end{aligned} \tag{177}$$

Рассмотрим правую часть неравенства (177). Прежде всего, отметим, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{km+r} A_{km+r-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_i) \eta_{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{km} (A_{km+r-i} - A_{km-i}) \eta_i + \sum_{i=km+1}^{km+r} A_{km+r-i} \eta_i \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_{km+i}) \eta_{-i}.
\end{aligned} \tag{178}$$

Оценим сумму последних трех слагаемых правой части (178), обозначив их сумму буквой  $\gamma_{kr1}^m$ , Тогда

$$\mathbf{D} \gamma_{kr1}^m = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (A_{r+i} - A_i)^2 + \sum_{i=1}^r A_{r-i}^2 \right) \mathbf{D} \eta_0. \tag{179}$$



Заметим, что  $(A_{r+i} - A_i)^2 \leq r \sum_{k=i+1}^{r+i} a_k^2$  и  $A_{r-i}^2 \leq (r-i) \sum_{k=1}^{r-i} a_k^2$ .

Тогда правую часть (179) можно оценить следующим образом:

$$\mathbf{D}\gamma_{kr1}^m = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (A_{r+i} - A_i)^2 + \sum_{i=1}^r A_{r-i}^2 \right) \mathbf{D}\eta_0 \leq 2r^2 \mathbf{D}\eta_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2. \quad (180)$$

Следовательно, из (177) – (178) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \eta_i \right| > \varepsilon\right) \\ & \leq m \max_{0 \leq r \leq m-1} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq (n-r)/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} + \gamma_{kr1}^m \right| > \varepsilon\right) \\ & \leq m \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/2\right) \quad (181) \\ & \quad + m \max_{0 \leq r \leq m-1} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq (n-r)/m} |\gamma_{kr1}^m| > \varepsilon/2\right) \\ & \leq m \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/2\right) \\ & \quad + n \max_{0 \leq r \leq m-1} \max_{k \leq (n-r)/m} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |\gamma_{kr1}^m| > \varepsilon/2\right) \end{aligned}$$

Применив неравенство Чебышева, а также (180) к правой части

неравенства (181), получим

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \eta_i \right| > \varepsilon\right) \\
& \leq m \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/2\right) \\
& + \frac{8m^2}{\varepsilon^2} \mathbf{D}\eta_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, (175) доказано.

Докажем неравенство (176). Имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{j=0}^{k-1} (a_0 + B_j) \eta_{j+1} + \sum_{j=k}^{\infty} (B_j - B_{j-k}) \eta_{j+1} \right| > \varepsilon\right) \\
& = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0 \leq r \leq m-1} \max_{k \leq (n-r)/m} \left| \sum_{j=0}^{km+r-1} (a_0 + B_j) \eta_{j+1} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=km+r}^{\infty} (B_j - B_{j-km-r}) \eta_{j+1} \right| > \varepsilon\right) \tag{182} \\
& \leq m \max_{0 \leq r \leq m-1} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq (n-r)/m} \left| \sum_{j=0}^{km+r-1} (a_0 + B_j) \eta_{j+1} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=km+r}^{\infty} (B_j - B_{j-km-r}) \eta_{j+1} \right| > \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Преобразуем правую часть неравенства (182):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{km+r-1} (a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km+r}^{\infty} (B_j - B_{j-km-r})\eta_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} (a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km}^{\infty} (B_j - B_{j-km})\eta_{j+1} \\
&+ \sum_{j=km}^{km+r-1} (a_0 + B_{j-km})\eta_{j+1} + \sum_{i=km+r}^{\infty} (B_{j-km} - B_{j-km-r})\eta_{j+1}.
\end{aligned} \tag{183}$$

Оценим сумму последних двух слагаемых правой части (183), обозначив ее буквой  $\gamma_{kr2}^m$ . Тогда

$$\mathbf{D}\gamma_{kr2}^m = \left( \sum_{j=0}^{r-1} (a_0 + B_j)^2 + \sum_{j=r}^{\infty} (B_j - B_{j-r})^2 \right) \mathbf{D}\eta_0. \tag{184}$$

Заметим, что

$$(a_0 + B_j)^2 \leq (j+1)(a_0^2 + \sum_{i=1}^j a_{-i}^2), \quad (B_j - B_{j-r})^2 \leq r \sum_{i=j-r+1}^j a_i^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{D}\gamma_{kr2}^m = \left( \sum_{j=0}^{r-1} (a_0 + B_j)^2 + \sum_{j=r}^{\infty} (B_j - B_{j-r})^2 \right) \mathbf{D}\eta_0 \leq 2r^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 \mathbf{D}\eta_0. \tag{185}$$

Далее, с помощью (185) оцениваем правую часть неравенства (182), действуя так же, как и при выводе оценки (181). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.11. Применяя лемму 5.15, получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\widehat{S}_n^N(t)| > \varepsilon \right) \\
& \leq \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i} \widehat{\xi}_i^N + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i} - A_i) \widehat{\xi}_{-i}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i) \widehat{\xi}_{i+1}^N + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i - B_{i-k}) \widehat{\xi}_{i+1}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \widehat{\xi}_i^N + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \widehat{\xi}_{-i}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \frac{32m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 \\
& + m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{km-1} (a_0 + B_i) \widehat{\xi}_{i+1}^N + \sum_{i=km}^{\infty} (B_i - B_{i-km}) \widehat{\xi}_{i+1}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \frac{32m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2.
\end{aligned} \tag{186}$$

Применяя лемму 5.13 и 5.14 к последнему неравенству правой части

(186), получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\widehat{S}_n^N(t)| > \varepsilon \right) \\
& \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \widehat{\xi}_i^N + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \widehat{\xi}_{-i}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{km-1} (a_0 + B_i) \widehat{\xi}_{i+1}^N + \sum_{i=km}^{\infty} (B_i - B_{i-km}) \widehat{\xi}_{i+1}^N \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \frac{64m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 \\
& \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^k A_{km-im} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \widehat{\xi}_i^N \right. \right. \\
& + \left. \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+im} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{-i}^N + \gamma_{1k}^m + \gamma_{2k}^m \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N \right. \right. \\
& + \left. \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N + \gamma_{3k}^m + \gamma_{4k}^m \right| > \varepsilon/2 \right) \\
& + \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \frac{64m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\widehat{S}_n^N(t)| > \varepsilon \right) \\
& \leq m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^k A_{km-im} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \widehat{\xi}_i^N \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+im} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{-i}^N \right| > \varepsilon/6 \right) \\
& \quad \left. + m \mathbf{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N \right| > \varepsilon/6 \right) \\
& \quad + \mathbf{D}_{\xi_0^N} \frac{64m^2}{\varepsilon^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mathbf{P} \left( \max_{k \leq n/m} \left| \frac{\gamma_{ik}^m}{\sqrt{n}} \right| > \varepsilon/6 \right). \tag{187}
\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (187). Введем обозначения:

$$b_i = a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}, \quad i \geq 1,$$

$$\eta_i = \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \widehat{\xi}_i^N, \quad i \geq 1,$$

$$A_k^1 = \sum_{i=1}^k b_i, \quad k \geq 1,$$

$$\eta_{-i} = \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{-i}^N, \quad i \leq 0.$$

С помощью этих обозначений первое слагаемое правой части (187)

переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^k A_{km-im} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \widehat{\xi}_i^N \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+im} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{-i}^N \right| > \varepsilon/6 \right) \\
& = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i}^1 \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i}^1 - A_i^1) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/6 \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что выражение  $\sum_{i=1}^k A_{k-i}^1 \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i}^1 - A_i^1) \eta_{-i}$  представляет собой сумму скользящих средних, построенных по последовательности случайных величин  $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  и коэффициентам  $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , где  $c_i = b_i$  при  $i \geq 1$ , и  $c_i = 0$  при  $i < 1$  (см. 164). Но тогда в силу леммы 5.12 справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=1}^k A_{k-i}^1 \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i}^1 - A_i^1) \eta_{-i} \right| > \varepsilon/6 \right) \\
& \leq \frac{144}{m\varepsilon^2} \left( \sum_{i \geq 1} |b_i| \right)^2 \mathbf{D}\eta_0 \tag{188} \\
& = \frac{144}{\varepsilon^2} \left( \sum_{i \geq 1} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}| \right)^2 \mathbf{D}\widehat{\xi}_0^N.
\end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (187). Обозначим

$$b_0 = a_0, \quad b_{-i} = a_{-(i-1)m+1} + \dots + a_{-im}, \quad i \geq 1,$$

$$B_k^1 = \sum_{i=1}^k b_{-i}, \quad k \geq 1.$$

В терминах этих обозначений второе слагаемое правой части (187) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (b_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \widehat{\xi}_{i+1}^N \right| > \varepsilon/6\right) \\
& = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i^1) \eta_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i^1 - B_{i-k}^1) \eta_{i+1} \right| > \varepsilon/6\right)
\end{aligned}$$

Но тогда опять же с помощью леммы 5.12 получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i^1) \eta_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i^1 - B_{i-k}^1) \eta_{i+1} \right| > \varepsilon/6\right) \\
& \leq \frac{144}{\varepsilon^2} \left( |a_0| + \sum_{i \geq 1} |a_{-(i-1)m+1} + \dots + a_{-im}| \right)^2 \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N}.
\end{aligned} \tag{189}$$

Используя (188) и (189), переписываем неравенство (187) так:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |\widehat{S}_n^N(t)| > \varepsilon\right) \\
& \leq \frac{144m}{\varepsilon^2} \left( \sum_{i \geq 1} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}| \right)^2 \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \\
& + \frac{144m}{\varepsilon^2} \left( |a_0| + \sum_{i \geq 1} |a_{-(i-1)m+1} + \dots + a_{-im}| \right)^2 \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \\
& + \frac{64m^2}{\varepsilon^2} \mathbf{D}_{\widehat{\xi}_0^N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}\left(\max_{k \leq n/m} \left| \frac{\gamma_{ik}^m}{\sqrt{n}} \right| > \varepsilon/6\right).
\end{aligned} \tag{190}$$



Далее, используя леммы 5.13 — 5.14 и неравенство (190), получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \left( \sup_{t \in [0,1]} |\widehat{S}_n^N(t)| > \varepsilon \right) \\
& \leq \frac{144m}{\varepsilon^2} \left( \sum_{i \geq 1} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}| \right)^2 \mathbf{D}_{\xi_0}^{\widehat{\xi}^N} \\
& + \frac{144m}{\varepsilon^2} \left( |a_0| + \sum_{i \geq 1} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)}| \right)^2 \mathbf{D}_{\xi_0}^{\widehat{\xi}^N} \\
& + \frac{64m^2}{\varepsilon^2} \mathbf{D}_{\xi_0}^{\widehat{\xi}^N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 + \frac{576m^2}{\varepsilon^2} \mathbf{D}_{\xi_0}^{\widehat{\xi}^N} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2.
\end{aligned} \tag{191}$$

Условие теоремы, а также тот факт, что  $\mathbf{D}_{\xi_0}^{\widehat{\xi}^N} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , заканчивают доказательство леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.3. Прежде всего представим  $n$  в виде  $km+r$ , где  $0 \leq r < m$  ( $m$  — натуральное число, см. условие теоремы 2). И в силу этого все дальнейшие предельные соотношения будут изучаться при  $k \rightarrow \infty$ . Далее мы будем использовать следующие два равенства из леммы 5.15 (см. представление (178) и (183)):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{km+r} A_{km+r-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_i) \eta_{-i} \\
& = \sum_{i=1}^{km} A_{km-i} \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i) \eta_{-i} + \gamma_{kr1}^m,
\end{aligned} \tag{192}$$

а также

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{km+r-1} (a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km+r}^{\infty} (B_j - B_{j-km-r})\eta_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{km-1} (a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km}^{\infty} (B_j - B_{j-km})\eta_{j+1} + \gamma_{kr2}^m.
\end{aligned} \tag{193}$$

Из лемм 5.13 и 5.14, а также из (192) и (193) получаем

$$\begin{aligned}
S_{km+r} &= \sum_{i=1}^k A_{km-im} \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \xi_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+im} - A_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \xi_{-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \xi_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \xi_{i+1} \\
&+ \sum_{i=1}^4 \gamma_{ik}^m + \gamma_{kr1}^m + \gamma_{kr2}^m.
\end{aligned}$$

Так же, как и в теореме 1, введем следующие обозначения:

$$b_i = a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}, \quad i \geq 1,$$

$$\eta_i = \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} \xi_i, \quad i \geq 1,$$

$$A_k^1 = \sum_{i=1}^k b_i, \quad k \geq 1,$$

$$\eta_{-i} = \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \xi_{-i}, \quad i \leq 0,$$

$$b_0 = a_0, \quad b_{-i} = a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)}, \quad i \geq 1,$$

$$B_k^1 = \sum_{i=1}^k b_{-i}, \quad k \geq 1.$$

Тогда  $S_{km+r}$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{km+r} &= \sum_{i=1}^k A_{k-i}^1 \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i}^1 - A_i^1) \eta_{-i} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i^1) \eta_i + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i^1 - B_{i-k}^1) \eta_i \\ &+ \sum_{i=1}^4 \gamma_{ik}^m + \gamma_{kr1}^m + \gamma_{kr2}^m. \end{aligned} \quad (194)$$

Рассмотрим первые четыре слагаемых правой части (194). Их сумма равна сумме скользящих средних, построенных по последовательностям  $\{\eta_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  и  $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  (см. (164)), а именно:

$$\sum_{i=1}^k A_{k-i}^1 \eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{k+i}^1 - A_i^1) \eta_{-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (a_0 + B_i^1) \eta_i + \sum_{i=k}^{\infty} (B_i^1 - B_{i-k}^1) \eta_i = \sum_{j=1}^k Y_j,$$

где

$$Y_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{j-i} \eta_i.$$

Обозначим  $Z_k = \sum_{j=1}^k Y_j$ . Заметим, что

$$Z_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (b_{i+1} + \dots + b_{i+k}) \eta_i.$$

Поскольку  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |b_i| < \infty$ , нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{\mathbf{D}Z_k}{km} = k^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (b_{i+1} + \dots + b_{i+k})^2$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{i+j} b_i - 2k^{-1} \sum_{j=1}^k j \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_{i+j} b_i.$$

При этом в силу леммы Кронекера (см. [27, стр. 328]) последняя двойная сумма в правой части этого равенства в пределе при  $k \rightarrow \infty$  обращается в ноль. Так что при условии абсолютной суммируемости последовательности  $\{b_k\}$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}Z_k}{km} = \sigma^2 = \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \right)^2. \quad (195)$$

Заметим, что (см. доказательство лемм 5.13 — 5.15)  $\mathbf{D}\gamma_{ik}^m \leq 4m^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и  $\mathbf{D}\gamma_{kri}^m \leq 2m^2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2$ ,  $i = 1, 2$ . При этом имеем

$$\frac{S_{km+r}}{\sqrt{km}} = \frac{Z_k}{\sqrt{km}} + \frac{\sum_{i=1}^4 \gamma_{ik}^m + \gamma_{kr1}^m + \gamma_{kr2}^m}{\sqrt{km}}.$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}S_{km+r}}{km} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}Z_k}{km}.$$

Но тогда (см. (195))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}S_{km+r}}{km} = \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \right)^2 = \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \right)^2.$$

Перейдем к доказательству теоремы 5.3. Обозначим

$$s_n(t) = S_{[nt]} / \sqrt{n}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Меняя порядок суммирования в (113), представим  $\frac{R_{[nt]}(M)}{\sqrt{n}M(n)}$  в виде

интеграла:

$$\int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dM(un)}{M(n)}. \quad (196)$$

В дальнейших утверждениях в качестве функции  $M$  мы будем использовать степенную функцию  $p_\nu$ .

**Лемма 5.16.** Семейство распределений случайных процессов  $\left\{ \frac{R_{[nt]}(p_\nu)}{n^{\nu+1/2}} \right\}$  плотно в  $D[0, 1]$  относительно равномерной метрики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имея в виду представление (196), найдем верхнюю оценку для

$$\begin{aligned} \sup_{|t-s|<\delta, t,s \in [0,1]} & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right. \\ & \left. - \int_0^{[ns]/n} s_n(([ns] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right|. \end{aligned} \quad (197)$$

Пусть для определенности  $s < t$ . Выполняются очевидные неравенства:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right. \\ & \left. - \int_0^{[ns]/n} s_n(([ns] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right| \\ & \leq \int_0^{[ns]/n} |s_n(([nt] - [nu])/n) - s_n(([ns] - [nu])/n)| \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \\ & \quad + \int_{[ns]/n}^{[nt]/n} |s_n(([nt] - [nu])/n)| \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)}. \end{aligned}$$

Заранее выберем  $n$ :  $1/n < \delta$ . Если  $|t - s| < \delta$ , то

$$\frac{[nt] - [nu]}{n} - \frac{[ns] - [nu]}{n} < 2\delta.$$

Поскольку  $u \geq [ns]/n$ , поэтому

$$\frac{[nt] - [nu]}{n} \leq \frac{[nt] - [ns]}{n} < 2\delta.$$

В итоге получаем верхнюю оценку для (197)

$$\begin{aligned} & \sup_{|t-s|<\delta, t,s \in [0,1]} \left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right. \\ & \left. - \int_0^{[ns]/n} s_n(([ns] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} \right| \\ & \leq 2 \sup_{|t-s|<2\delta, t,s \in [0,1]} |s_n(t) - s_n(s)|. \end{aligned}$$

Откуда, используя лемму 5.11, получаем утверждение леммы.

Далее, с учетом леммы 5.16, чтобы доказать теорему 5.3 нам достаточно установить слабую сходимость конечномерных распределений случайных процессов  $\frac{R_{[nt]}(p_\nu)}{n^{1/2+\nu}}$ . Исследование сходимости конечномерных распределений мы разобьем на леммы 5.17 — 5.20.

Введем обозначение:

$$s_n^{(1)}(t) = S_{[nt]+1}/\sqrt{n}, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

**Лемма 5.17.** Для любого  $t \in [0, 1]$  при  $n \rightarrow +\infty$  выполняется

соотношение:

$$\left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^t (-s_n^{(1)}(u)) d(t - u)^\nu \right| \xrightarrow{P} 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $t \in (0, 1]$ . Представим  $\int_0^t s_n^{(1)}(u) d(t - u)^\nu$

в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^t s_n^{(1)}(u) d(t - u)^\nu &= \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d(t - u)^\nu \\ &+ \int_{[nt]/n}^t s_n^{(1)}(u) d(t - u)^\nu. \end{aligned} \quad (198)$$

Оценим второе слагаемое правой части (198). Имеем

$$\left| \int_{[nt]/n}^t s_n^{(1)}(u) d(t - u)^\nu \right| \leq |s_n^{(1)}(t)|(t - [nt]/n)^\nu \xrightarrow{P} 0. \quad (199)$$

Далее, заметим, что

$$\int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu = - \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d([nt]/n - u)^\nu.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{[nt]/n} s_n(([nt] - [nu])/n) du^\nu - \int_0^{[nt]/n} (-s_n^{(1)}(u)) d(t - u)^\nu \right| \\ &\leq \left| \int_0^{[nt]/n} s_n^{(1)}(u) d((t - u)^\nu - ([nt]/n - u)^\nu) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} |s_n^{(1)}(t)| |(t - [nt]/n)^\nu - (t^\nu - ([nt]/n)^\nu)| \xrightarrow{P} 0. \end{aligned} \quad (200)$$

Заметим, что для оценки третьего интеграла в (200) мы воспользовались тем, что функция  $f(u) = (t - u)^\nu - ([nt]/n - u)^\nu$  монотонна на

промежутке  $[0, [nt]/n]$ . Из (199) и (200) следует утверждение леммы.

**Лемма 5.18.** *При  $n \rightarrow +\infty$  выполняется соотношение:*

$$\sup_{t \in [0,1]} |s_n^{(1)}(t) - s_n(t)| \xrightarrow{P} 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим некоторое  $\varepsilon > 0$ . Выполняется очевидное неравенство:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |s_n^{(1)}(t) - s_n(t)| > \varepsilon\right) \leq n\mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}). \quad (201)$$

Из конечности  $\langle |X_1|^2 \rangle$  сразу следует

$$n\mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon\sqrt{n}) \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 5.19.** *Пусть  $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$  – произвольный набор действительных чисел,  $\{t_i; i = 1, \dots, l\}$  – произвольный набор из интервала  $[0, 1]$ . Тогда при  $n \rightarrow +\infty$*

$$\sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} s_n^{(1)}(u) d(t_i - u)^\nu \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} \sigma W(u) d(t_i - u)^\nu.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Определим функционал  $F : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$F(f) = \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} f(u) d(t_i - u)^\nu.$$

Очевидно, что  $F$  является непрерывным в равномерной топологии



в точках из  $C[0, 1]$  и измеримым на  $D[0, 1]$  в топологии А. В. Скорохода. Следовательно, с учетом леммы 5.18, получаем, что  $F(s_n^{(1)}(\cdot))$  сходится по распределению к  $F(\sigma W)$  (см., например, [6]), откуда сразу следует утверждение леммы.

**Лемма 5.20.** *При  $n \rightarrow \infty$  конечномерные распределения случайных процессов  $\frac{R_{[nt]}(M)}{n^{1/2+\nu}}$  сходятся к конечномерным распределениям процесса  $\int_0^t \sigma W(t-u) du^\nu$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\{c_i; i = 1, \dots, l\}$  – произвольный набор действительных чисел,  $\{t_i; i = 1, \dots, l\} \subseteq [0, 1]$ . Из леммы (5.17) следует, что

$$\left| \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{[nt_i]/n} s_n(([nt_i] - [nu])/n) \frac{dp_\nu(un)}{p_\nu(n)} - \sum_{i=1}^l c_i \int_0^{t_i} (-s_n^{(1)}(u)) d(t_i - u)^\nu \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Используя полученное соотношение, лемму 5.19, представление в виде интеграла (196) для  $\frac{R_{[nt]}(M)}{n^{1/2+\nu}}$ , а также известный прием Крамера-Уолда (см. [4]), получаем утверждение леммы.

### 5.8.3 Доказательство утверждений раздела 5.6

Доказательство теоремы 5.4 разобьем на леммы 5.21–5.23. Напомним обозначение:  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  при  $n \geq 1$ ,  $S_0 = 0$ . В качестве леммы 5.21 приведем утверждение из [51, теорема 3].

**Лемма 5.21.** Пусть  $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$  для некоторого  $\alpha > 2$ , тогда случайное блуждание  $S_n$  и процесс  $B_H(n)$ , можно задать на одном вероятностном пространстве, так что при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k - \sigma B_H(k)| = o(\Delta_{\alpha,n}) + O(\sqrt{(1 + \Delta_n) \log n}) \text{ н. н.}$$

**Лемма 5.22.** Пусть выполняется условие теоремы 5.4, тогда при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение:

$$\begin{aligned} R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s) \\ = o(M(n)\Delta_{\alpha,n}) + O(M(n)\sqrt{(1 + \Delta_n) \log n}) \text{ н. н.} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим  $R_n(M)$  в виде  $\sum_{i=0}^n S_{n-i} \Delta M(i)$ , откуда получаем представление  $R_n(M)$  в виде интеграла:  $\int_0^n S_{n-[s]} dM(s)$ . Воспользовавшись этим представлением, выводим неравенство:

$$|R_n(M) - \sigma \int_0^n B_H(n - [s]) dM(s)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} |S_k - \sigma B_H(k)| M(n).$$

Откуда, используя лемму 5.21, получаем утверждение леммы.

**Лемма 5.23.** При  $t \rightarrow \infty$  выполняется равенство:

$$\left| \int_0^t B_H(t - s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t] - [s]) dM(s) \right| = O(M(t)\sqrt{\log t}) \text{ н. н.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего имеет место неравенство:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t B_H(t-s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) \right| \\
& \leq \left| \int_0^{[t]} (B_H(t-s) - B_H([t]-[s])) dM(s) \right| \\
& + \left| \int_{[t]}^t B_H(t-s) dM(s) \right| \tag{202} \\
& \leq \sup_{|u-v| \leq 1, u, v \in [0, t]} |B_H(u) - B_H(v)| M(t) \\
& + \sup_{|u| \leq 1, u \in [0, t]} |B_H(u)| M(t).
\end{aligned}$$

Далее, из (202) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t B_H(t-s) dM(s) - \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) \right| \\
& \leq 2 \sup_{|u-v| \leq 1, u, v \in [0, t]} |B_H(u) - B_H(v)| M(t).
\end{aligned}$$

Применяя лемму 5.4, получаем утверждение леммы 5.23.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.4. Выполняется следующее очевидное неравенство

$$\begin{aligned}
& |R_{[t]}(M) - Z_t(M, H)| \\
& \leq |R_{[t]}(M) - \sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s)| \tag{203} \\
& + |\sigma \int_0^{[t]} B_H([t]-[s]) dM(s) - \sigma \int_0^t B_H(t-s) dM(s)|.
\end{aligned}$$

Применяя леммы 5.22 и 5.23 соответственно к первому и второму слагаемому правой части (203), получаем утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.1. В соответствии с [67, лемма 16] получаем, что

$$\Delta_n = O(n^{2H-2\delta}), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (204)$$

Покажем, что

$$\Delta_{\alpha,n} = O(n^{H'-1/2+1/\alpha}), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (205)$$

где  $H' = \max\{H, 1/2\}$ . Дальнейшие вычисления повторяют схему доказательства леммы 5 из [51].

Выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,n} &= n^{1/\alpha} \sum_{k=-n}^{n-1} |a_k - a_{k+n}| + \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| \\ &+ \sum_{k=-2n+1}^{-n-1} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| + \sum_{k=-\infty}^{-2n} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}|. \end{aligned} \quad (206)$$

Оценим первое слагаемое правой части (206). Используя условие (НН) (см. соотношения (127)), выводим

$$n^{1/\alpha} \sum_{k=-n}^{n-1} |a_k - a_{k+n}| \leq 2n^{1/\alpha} \sum_{k=0}^{2n-1} |a_k| = O(n^{H'-1/2+1/\alpha}).$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (206). Заметим, что из условия (Н) следует, что при всех  $k \geq 1$ :  $|a_k| + |a_{-k}| \leq Ck^{H-3/2}$ , где  $C$  — некоторая константа. Далее, имеем (в силу того что коэффи-

циенты  $a_i$  монотонны при  $i \geq N$ )

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} k^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| &\leq \sum_{k=n}^{2n-1} k^{1/\alpha} |a_k| + \sum_{k=2n}^{\infty} |a_k| (k^{1/\alpha} - (k-n)^{1/\alpha}) \\ &\leq C(2n-1)^{1/\alpha} n^{H-1/2} + C \sum_{k=n}^{\infty} k^{H-3/2} n(1/\alpha) k^{1/\alpha-1}. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| = O(n^{H-1/2+1/\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Третье слагаемое правой части (206) оценивается аналогично первому слагаемому того же выражения, в итоге получаем

$$\sum_{k=-2n+1}^{-n-1} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| = O(n^{H-1/2+1/\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Соответственно четвертое слагаемое правой части (206) оценивается аналогично второму слагаемому

$$\sum_{k=-\infty}^{-2n} |k|^{1/\alpha} |a_k - a_{k+n}| = O(n^{H-1/2+1/\alpha}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Объединяя оценки первого — четвертого слагаемого правой части (206), получаем (205). Применяя соотношения (204) и (205) к теореме 5.4, получаем заключение следствия.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.4.** Выполняется следующее

равенство:

$$\langle Z_t^2(M, H) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \langle B_H(t-r)B_H(t-s) \rangle dM(r)dM(s). \quad (207)$$

Из (120) и (207) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle Z_t^2(M, H) \rangle \\ &= \sigma^2 \int_0^t \int_0^t \frac{(t-r)^{2H} + (t-s)^{2H} - |r-s|^{2H}}{2} dM(r)dM(s). \end{aligned} \quad (208)$$

Введем обозначение:  $K(u, v) = \frac{(1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}}{2}$ . Отметим, что

$$0 \leq K(u, v) \leq 1 \quad (209)$$

при всех  $u, v \in [0, 1]$ .

Пусть сначала  $\nu > 0$ . Представим  $M(t)$  в виде  $t^\nu l(t)$ . Сделав в (208) замену  $r = tu$  и  $s = tv$  и разделив на  $\sigma^2 t^{2H+2\nu} l^2(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\langle Z_t^2(M, H) \rangle}{\sigma^2 t^{2H+2\nu} l^2(t)} &= \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{l(ut)}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} du^\nu dv^\nu \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} dl(ut) dv^\nu \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{v^\nu}{l(t)} \frac{l(ut)}{l(t)} dl(vt) du^\nu \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{v^\nu}{l(t)} dl(ut) dl(vt). \end{aligned} \quad (210)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (210). Из возрастания и неотрицательности  $l$  на  $[0, +\infty)$  следуют неравенства  $0 \leq K(u, v) \frac{l(ut)}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} \leq K(u, v)$ . Отметим, что  $0 \leq \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) du^\nu dv^\nu <$

$+\infty$ , кроме того, для любых  $u, v \in (0, 1)$  имеют место соотношения:  $\frac{l(ut)}{l(t)} \rightarrow 1$  и  $\frac{l(vt)}{l(t)} \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Поэтому из леммы Фату следует

$$\int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{l(ut)}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} du^\nu dv^\nu \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) du^\nu dv^\nu \quad (211)$$

при  $t \rightarrow +\infty$ . Отметим, что  $s_{\nu, H}^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) du^\nu dv^\nu$  (см. заключение предложения).

Рассмотрим второе слагаемое правой части (210). Выберем произвольное  $0 < \varepsilon < 1$ . В силу неравенства (209) получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} dl(ut) dv^\nu \leq \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) \int_0^1 \frac{l(vt)}{l(t)} dv^\nu. \quad (212)$$

Используя возрастание  $l$ , получаем, что второй множитель в (212) оценивается сверху 1, стало быть, выполняется неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} dl(ut) dv^\nu \leq \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut). \quad (213)$$

Представим правую часть неравенства (213) в виде

$$\int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) = \int_0^\varepsilon \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) + \int_\varepsilon^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut). \quad (214)$$

Для первого слагаемого правой части (214), очевидно, получаем неравенство:  $\int_0^\varepsilon \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) \leq \varepsilon^\nu \left( \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)} - \frac{l(0)}{l(t)} \right)$ . Второе слагаемое оценивается таким образом:  $\int_\varepsilon^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) \leq 1 - \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)}$ . В итоге имеем нера-

венства:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) &\leq \varepsilon^\nu \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)} - \frac{l(0)}{l(t)} \right) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{l(\varepsilon t)}{l(t)} \right) \\ &= \varepsilon^\nu \left( 1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)} \right). \end{aligned} \quad (215)$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ , учитывая (213) и (215), выводим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{l(vt)}{l(t)} dl(ut) dv^\nu = 0. \quad (216)$$

Для третьего слагаемого правой части (210) аналогичным образом получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{v^\nu}{l(t)} \frac{l(ut)}{l(t)} dl(vt) du^\nu = 0. \quad (217)$$

Рассмотрим четвертое слагаемое правой части (210). Учитывая (209), получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{v^\nu}{l(t)} dl(ut) dl(vt) \leq \left( \int_0^1 \frac{u^\nu}{l(t)} dl(ut) \right)^2. \quad (218)$$

Далее, имея ввиду (215), выводим

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{v^\nu}{l(t)} dl(ut) dl(vt) \leq \varepsilon^{2\nu} \left( 1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)} \right)^2. \quad (219)$$



Откуда в силу произвольности  $\varepsilon$  получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 K(u, v) \frac{u^\nu}{l(t)} \frac{v^\nu}{l(t)} dl(ut) dl(vt) = 0. \quad (220)$$

Применяя соотношения (211), (216), (217) и (220) к (210), получаем справедливость соотношения (128).

Перейдем к случаю  $\nu = 0$ . В этом случае  $M = l$  — медленно меняющаяся функция из класса  $\mathcal{R}_0$ . Очевидно, что правая часть соотношения (210) переписывается в этом случае в виде:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut) dl(vt). \quad (221)$$

Выберем произвольное  $0 < \varepsilon < 1$ . Существует  $\delta > 0$ , такое что при всех  $u, v \in [0, \delta)$  выполняется неравенство

$$K(u, v) \geq 1 - \varepsilon. \quad (222)$$

Рассмотрим (221). Используя неравенства (209) и (222), получаем

$$(1 - \varepsilon) \left( \int_0^\delta \frac{dl(ut)}{l(t)} \right)^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut) dl(vt) \leq \left( \int_0^1 \frac{dl(ut)}{l(t)} \right)^2.$$

Откуда выводим

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \left( \frac{l(\delta t)}{l(t)} - \frac{l(0)}{l(t)} \right)^2 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut) dl(vt) \\ &\leq \left( 1 - \frac{l(0)}{l(t)} \right)^2. \end{aligned} \quad (223)$$

Из (223) вытекают неравенства

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut)dl(vt) \leq \left(1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2 \quad (224)$$

и

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut)dl(vt) \geq (1 - \varepsilon) \left(1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \quad (225)$$

Из (224) и (225) следует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{K(u, v)}{l^2(t)} dl(ut)dl(vt) = \left(1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \quad (226)$$

В итоге из соотношения (226) получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle Z_t^2(M, H) \rangle}{\sigma^2 t^{2H} l^2(t)} = \left(1 - \frac{l(0)}{l(+\infty)}\right)^2. \quad (227)$$

Из (227) выводим справедливость соотношения (129). Предложение доказано.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 5.2.** Прежде всего отметим, что утверждение следствия 5.1 справедливо для гауссовского аналога процесса  $R_n(M)$ , когда случайные величины  $\xi_k$  – стандартные нормальные, при этом величина  $\langle R_n^2(M) \rangle$  не изменится. Следовательно, выполняется соотношение (130) (см. замечание 5.3). Далее, из леммы 5.10 вытекает утверждение следствия.

## 5.9 Результаты главы 5

В рамках феноменологии потока памяти (см. [31], [25]) построена модель случайного блуждания, для которой в условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим, при этом вообще говоря различается случай формирования памяти по правильно меняющейся функции и лестнице Кантора.

Показатель степенного изменения дисперсии построенного процесса блуждания складывается из удвоенного параметра  $H$  нелокальности воздействия среды и удвоенного параметра  $\nu$  памяти частицы. В случае  $H \geq 1/2$  удается получить гауссовскую аппроксимацию упомянутого процесса блуждания при оптимальных моментных ограничениях. Отметим, что на этой аппроксимации основывается алгоритм вычисления обозначенных параметров нелокальности.

В случае формирования памяти по лестнице Кантора установлена бинарная структура информации о предыстории частицы (см. предложение 5.1).

Представленная модель аномальной диффузии допускает «промежуточные случаи», когда дисперсия соответствующего блуждания ведет себя как произведение степенной на медленно меняющуюся функцию. В частности, таким образом можно рассмотреть переходный случай от диффузионного режима блуждания к аномальному.

Установленное свойство говорит об устойчивости модели как ее способности сохранять адекватность при замене степенного поведения дисперсии на более общее, а именно правильное поведение.

Если для некоторого блуждания установлено, что показатель степенного изменения дисперсии находится в диапазоне  $(0, 4)$ , то, используя соответствующие выборочные данные, можно вычислить параметры нелокальности и оценить близость к модели блуждания со степенной памятью. Далее, вычисленные параметры нелокальности можно использовать для прямого стохастического моделирования процесса блуждания с соответствующими параметрами нелокальности и законом изменения дисперсии (см. соотношения (113), (114) и условие (H)).

Заметим, что за рамками настоящей работы осталось вычисление параметров нелокальности для модели блуждания с канторовой памятью. Кроме того, отметим, что для полученной модели блуждания не рассматривается вопрос о геометрической структуре сингулярных зон.

Процесс шума, являющийся первой разностной производной по времени от полученного блуждания, будет использоваться в следующей главе для моделирования плотности плазмы термоядерной установки.

## ГЛАВА 6

### Методология анализа временного ряда плотности плазмы

#### 6.1 Введение

В настоящей главе оценивается адекватность модели нестационарного шума, полученной в предыдущей главе. Оценка адекватности выполняется на выборке значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, измеренной в периферийной области удержания плазмы термоядерной установки Токамак Т-10 (см. <sup>2</sup>), при этом мера адекватности модели определяется реально достигнутым уровнем значимости полученного в данной главе статистического критерия. Дадим краткое описание используемой модели. Нестационарный шум реализуется случайной последовательностью с конечными вторыми моментами и является скачками случайного блуждания с сильно зависимыми приращениями. Дисперсия этого случайного блуждания имеет степенное поведение по времени, при этом показатель степенного изменения может находиться в диапазоне  $(0, 4)$ , т. е. модель реализует суб- и супердиффузионный режим переноса.

Отметим, что в работе [7] к аналогичным выборочным данным применяется мультифрактальный подход, при этом в рамках логпуассоновской модели получен закон изменения дисперсии для процесса блуждания частиц, причем этот закон имеет степенной ха-

---

<sup>2</sup>Выборка предоставлена профессором В. П. Будаевым. Российский научный центр "Курчатовский институт". E-mail: budaev@mail.ru

рактер с параметром степенного изменения в диапазоне  $(1.2, 1.8)$ , что говорит о супердиффузионном режиме переноса. В настоящей главе получен супердиффузионный режим переноса для модели блуждания, построенной по временному ряду значений плотности плазмы, при этом параметр степенного изменения дисперсии также находится в диапазоне  $(1.2, 1.8)$ .

Заметим, что аномальное поведение дисперсии процесса блуждания частиц, полученное в работе [7], послужило мотивацией к попытке установить соответствие между временным рядом плотности плазмы и моделью нестационарного шума из главы 5, которая также порождает аномальные режимы переноса. Кроме того, параметры нелокальности, возникающие в модели нестационарного шума, имеют вполне конкретную физическую интерпретацию. После оценки адекватности модель нестационарного шума можно использовать для стохастического моделирования временного ряда значений плотности плазмы.

Отметим книгу [20] (см. также [3]), в которой эмпирическая функция распределения стационарного отрезка временного ряда флуктуаций плотности плазмы и его первой разности аппроксимируются сдвиг-масштабной смесью нормальных распределений. В настоящей главе замечено существенное отличие эмпирической функции распределения стационарной составляющей временного ряда значений плотности плазмы от нормального распределения, но вопрос

аппроксимации этой функции распределения смесью нормальных распределений не рассматривался.

Основные результаты шестой главы опубликованы в [73], [75], [77].

## 6.2 Основные определения, структура главы и структура изучаемых данных

Пусть  $(X_i; i = 1, 2, \dots)$  — последовательность стационарных (в широком смысле) случайных величин с конечным вторым моментом. В дальнейшем всюду будем предполагать степенной характер закона изменения дисперсии суммы  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  с показателем  $H \in (0, 1)$ , а именно:

$$\langle S_n^2 \rangle - \langle S_n \rangle^2 \sim \sigma^2 n^{2H}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (228)$$

где параметр  $H$  в (228) называется параметром Хёрста (см., например, [54]), ненулевой параметр  $\sigma$  будем называть коэффициентом степенного изменения. Таковую последовательность  $(X_i)$  будем называть *стационарным шумом*.

Отметим, что последовательность  $(X_i; i = 1, 2, \dots)$  может, в частности, являться суммой стационарных шумов, при этом выделяется шум с наибольшим параметром Хёрста (см. замечание 6.1).

**Замечание 6.1.** Пусть  $(X_i; i = 1, 2, \dots)$  и  $(Y_i; i = 1, 2, \dots)$  — две заданные на одном вероятностном пространстве последовательности с нулевым средним, каждая из которых является стационарным шу-

мом. Обозначим  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  и  $W_n = \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)$ ,  $n \geq 1$ . Пусть  $\langle S_n^2 \rangle \sim \sigma_1^2 n^{2H_1}$  и  $\langle Z_n^2 \rangle \sim \sigma_2^2 n^{2H_2}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , при этом  $H_1 > H_2$ . Тогда для последовательности  $(\xi_i; i = 1, 2, \dots)$ , где  $\xi_i = X_i + Y_i$  имеет место соотношение  $\langle W_n^2 \rangle \sim \sigma_1^2 n^{2H_1}$ . Действительно, выполняется равенство  $\langle W_n^2 \rangle = \langle S_n^2 \rangle + \langle Z_n^2 \rangle + 2\langle S_n, Z_n \rangle$ , кроме того, в силу неравенства Коши-Буняковского, имеем  $|\langle S_n, Z_n \rangle| \leq \sqrt{\langle S_n^2 \rangle \langle Z_n^2 \rangle}$ , стало быть,  $\langle S_n, Z_n \rangle / n^{2H_1} \rightarrow 0$ . Откуда выводим справедливость соотношения  $\langle W_n^2 \rangle \sim \sigma_1^2 n^{2H_1}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Используя последовательность  $(X_i; i = 1, 2, \dots)$ , определим *нестационарный шум* следующим образом

$$\rho_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (229)$$

где  $\Delta p_\nu(i) = p_\nu(i+1) - p_\nu(i)$ ,  $p_\nu(t) = t^\nu$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$  (считаем, что  $p_0(0) = 0$ ). В случае  $\nu = 0$  последовательность  $(\rho_k)$  совпадает с  $(X_k)$ . Параметр  $\nu$  будем интерпретировать как индекс нестационарности процесса (в случае  $\nu = 0$  последовательность  $(\rho_k)$  становится стационарной).

Обозначим  $a = \langle X_1 \rangle$ . Заметим, что выполняется равенство

$$\rho_k = ak^\nu + \sum_{i=0}^{k-1} (X_{k-i} - a) \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (230)$$

Стало быть, последовательность  $(\rho_k)$  обладает степенным трендом.

Отметим, что стационарная структура  $(X_k)$  ассоциируется нами



(см. [73]) с нелокальностью воздействия внешних факторов, имеющих в определенном смысле неизменный по времени характер. Параметр  $H$  в этом случае отражает персистентность или антиперсистентность этих внешних факторов. Правая часть (229) представляет собой поток памяти, порождаемый случайной последовательностью  $(X_k)$  и управляемый степенной функцией  $p_\nu$  (см. [31], [25]).

Будем рассматривать экспериментально полученную выборку временного ряда значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы (единица измерения времени 1 мкс):  $\rho = (\rho_k; k = 1, \dots, n)$ . Сигнал плотности нормирован на величину средней плотности плазмы на краю центральной зоны в Токамаке Т-10, которая составляет величину  $1 \cdot 10^{13}$  частиц/см<sup>3</sup> (это типичное значение в токамаках) (см. [7, стр. 907]). Исследованный сигнал измерен в зоне, где наблюдается явление перемежаемости с признаками дальних корреляций. На рис. 1 приведен график упомянутого временного ряда.

Заметим, что при визуальном анализе этого графика наблюдается слабо возрастающая тенденция представленного временного ряда, это позволяет заранее предположить наличие степенного тренда с параметром степенного изменения  $0 \leq \nu \leq 0.5$  (см. соотношение (230)).

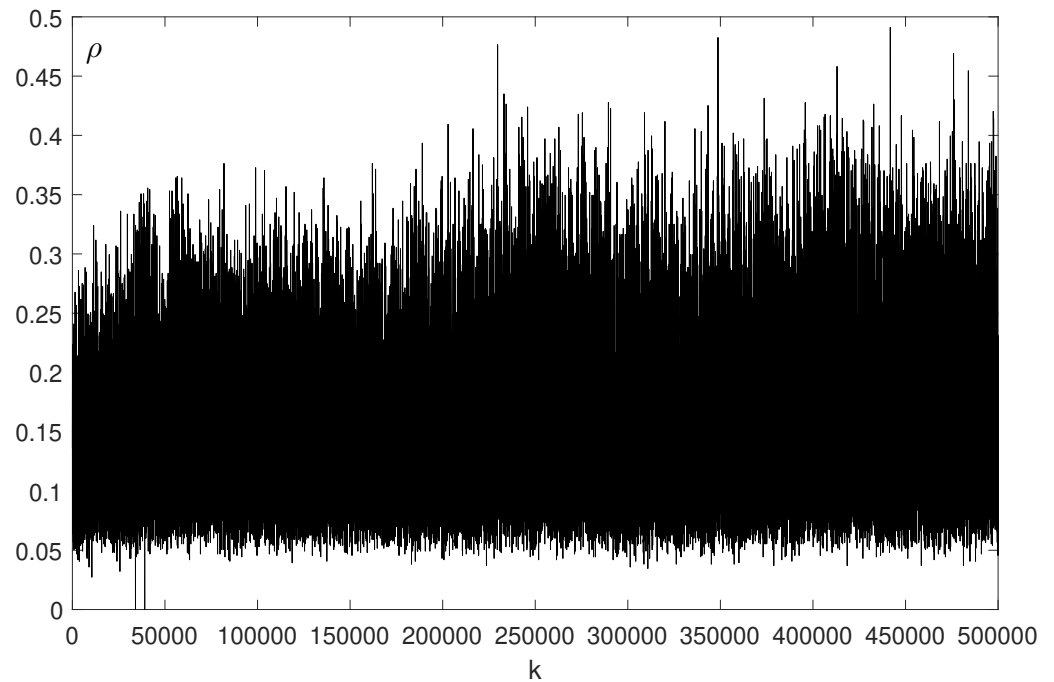


Рис. 1. График временного ряда значений плотности плазмы,

$$\rho = (\rho_k)_{k=1, \dots, 5 \cdot 10^5}.$$

Проверим адекватность модели нестационарного шума (229) на соответствие обозначенным выше выборочным данным. Для этого мы реализуем следующую схему.

**Схема оценки адекватности модели:**

1. Для каждого  $\nu \in [0, 1]$  решаем систему (229) (в данной работе значение  $\nu$  выбирается из множества  $\{k/10^3 : k = 0, \dots, 5 \cdot 10^2\}$ ). В итоге получаем последовательность  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  (зависящую от  $\nu$ ).

2. Используя метод 1 (см. раздел 6.3.1), с помощью последовательности  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  находим оценки параметров степенного изменения дисперсии  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , а именно: оценку  $H^*(\nu)$  параметра Хёрста и оценку  $\sigma^*(\nu)$  коэффициента степенного изменения.
3. На выборке  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  определяем меру соответствия  $M_e(\nu)$  (где  $e$  — наперед заданный уровень значимости) основной гипотезе о степенном поведении дисперсии  $S_n$  и стационарности этой последовательности (см. раздел 6.3.2, метод 2).
4. Выбираем  $\nu^*$ , для которого  $M_e(\nu)$  принимает максимальное значение.
5. Получаем пару значений  $(\nu^*, H^*)$  и значение меры соответствия  $M_e(\nu^*)$ , при котором можно говорить об адекватности модели (229) по ее соответствию выборочным данным.

Далее, используя выборку  $(X_k)$ , соответствующую оценке  $\nu^*$ , реализуем схему стохастического моделирования временного ряда  $(\rho_k)$  (см. раздел 6.3.3, метод 3 и раздел 6.3.4).

В разделе 6.4 приводятся численные результаты оценки адекват-

ности модели нестационарного шума на выборке значений плотности плазмы, а также результаты стохастического моделирования.

В разделе 6.5 представлена модель блуждания, построенная по временному ряду значений плотности плазмы, для которой установлен супердиффузионный режим переноса.

### 6.3 Методология оценки адекватности модели

В дальнейшем будем обозначать через  $a^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  оценку математического ожидания  $a = \langle X_1 \rangle$ .

#### 6.3.1 Алгоритм вычисления параметра Хёрста.

Приведем метод дисперсий (см., например, [43], [21]), который будет использоваться для поиска параметра Хёрста и коэффициента степенного изменения (см. соотношение (228)). Отметим, что для вычисления этих параметров в этом методе используются условия стационарности последовательности  $(X_k)$  и степенного поведения дисперсии суммы  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

#### Метод 1:

1. Центрируем выборку  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$ , т. е. найдем  $X_k^* = X_k - a^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ . В итоге получаем выборку  $(X_k^*)_{k=1, \dots, n}$ .
2. Для  $L = 0, \dots, m - 2$  ( $m = \lceil \log_2(n) \rceil$ , где  $\lceil \cdot \rceil$  – целая часть числа)

масштабируем данные:  $X_j^{(L)} = \sum_{i=(j-1)2^{L+1}}^{j2^L} X_i^*$ ,  $j = 1, \dots, 2^{m-L}$ .

3. Находим стандартное отклонение  $\bar{V}_L$  масштабированных данных:

$$\bar{V}_L = \sqrt{\frac{1}{2^{m-L}} \sum_{j=1}^{2^{m-L}} (X_j^{(L)})^2}.$$

4. Составляем модель линейной регрессии  $\ln \bar{V}_L = HL \ln 2 + b + \varepsilon_L$ ,  $L = 0, \dots, m - 2$ , где  $\varepsilon_L$  – ошибки модели.

5. Методом наименьших квадратов находим оценку  $H^*$  параметра Хёрста  $H$  и свободный коэффициент  $b$ . Используя  $b$ , определяем оценку  $\sigma^* = \exp b$  параметра  $\sigma$ .

### 6.3.2 Метод проверки стационарности

Центрированную гауссовскую последовательность  $f = (f_k; k = 1, \dots, n)$  будем называть *фрактальным шумом* с параметром  $H \in (0, 1)$  (см., например, [43]), если ее ковариационная матрица  $R = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  имеет вид

$$r_{ij} = \frac{\delta^2}{2} (|i - j + 1|^{2H} + |i - j - 1|^{2H} - 2|i - j|^{2H}), \quad (231)$$

где  $\delta$  – ненулевой параметр.

Непосредственно из определения следует стационарность последовательности  $(f_k)$  и закон изменения дисперсии суммы  $\langle (\sum_{k=1}^n f_k)^2 \rangle = \delta^2 n^{2H}$  (в случае  $H = 1/2$  получаем белый шум).

Для любой невырожденной ковариационной матрицы  $R$  гауссовской последовательности найдется ортогональная матрица  $C$  и диагональная  $D$ , такие что  $C^T R C = D$  (для поиска матриц  $C$  и  $D$  автор использовал функцию `eig` математического пакета Matlab). Обозначим  $B = \sqrt{D}$ . Отметим, что произведение  $(B^{-1} C^T) f^T$  дает вектор  $\eta^T$  с независимыми стандартными нормальными компонентами (см., например, [41]).

В следующем методе 2 мы приведем критерий проверки того, что выборка  $(X_j^{(\tau)}, j = 1, \dots, [n/\tau])$ , где  $X_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} (X_i - a^*)$  и  $1 \leq \tau < n$  (напомним, что  $a^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ) является фрактальным шумом. Отметим, что масштабный параметр  $\tau$  необходимо выбирать так, чтобы  $\tau \gg 1$  и  $n/\tau \gg 1$ . Условие  $n/\tau \gg 1$  обеспечивает корректное применение критерия Пирсона для проверки нормальности (см. ниже пункт 6). Условие  $\tau \gg 1$  должно обеспечить близость распределения случайной величины  $\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \tau a$  к нормальному закону, а также близость  $\langle (\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \tau a)^2 \rangle$  к  $\sigma^2 \tau^{2H}$  (см. соотношение (228)).

## Метод 2:

1. Методом дисперсий (см. метод 1) находим оценки  $\sigma^*$  и  $H^*$

параметров  $\sigma$  и  $H$  соответственно.

2. Центрируем с помощью  $a^*$  выборку  $(X_k; k = 1, \dots, n)$ . Получаем  $X_k^* = X_k - a^*$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
3. Формируем выборку:  $X_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} X_i^*$ ,  $j = 1, \dots, [n/\tau]$ .
4. Определяем ковариационную матрицу  $R$  (см. соотношение 231), где  $\delta = \sigma^* \tau H^*$  (учитываем степенное поведение дисперсии блока длины  $\tau$ ).
5. Используя матрицу  $R$ , находим матрицы  $B$  и  $C$ . Умножив  $B^{-1}C^T$  на вектор  $(X_j^{(\tau)}; j = 1, \dots, [n/\tau])^T$  получаем выборку  $(\eta_i; i = 1, \dots, [n/\tau])$ .
6. На реализации выборки  $(\eta_i; i = 1, \dots, [n/\tau])$  найдем реально достигнутый уровень значимости критерия Пирсона при основной гипотезе о стандартной нормальности выборки.
  - 6.1. Обозначим  $m = [n/\tau]$  (здесь  $[\cdot]$  — целая часть числа). Разобьем числовую ось на  $k = [\log_2 m] + 1$  непересекающихся интервалов  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  так, чтобы  $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) = m\Phi_{0,1}(\Delta_2) =$

... =  $m\Phi_{0,1}(\Delta_k) = m/k$ , где  $\Phi_{0,1}$  — функция распределения стандартного нормального закона. Определяем на выборке  $(\eta_i; i = 1, \dots, [n/\tau])$  значение статистики Пирсона  $\Pi = \sum_{i=1}^k (\frac{\nu_i - m/k}{m/k})^2$ , где  $\nu_i$  — число попаданий элементов выборки  $(\eta_i)$  в  $\Delta_i, i = 1, \dots, k$ .

6.2. Имея в виду три оцениваемых параметра  $a, \sigma$  и  $H$ , находим реально достигнутый уровень значимости критерия Пирсона, а именно:  $\varepsilon(\tau) = 1 - \chi_{k-4}^2(\Pi)$ , где  $\chi_{k-4}^2(\cdot)$  — известное распределение  $\chi^2$  с  $k - 4$  степенями свободы.

Заметим, что при дополнительных ограничениях на последовательность  $(X_k)$ , включая условие  $H > 1/2$  и  $\langle X_1^\alpha \rangle < +\infty$  при некотором  $\alpha > 2$ , из [2, теорема 3] следует «весьма грубая» оценка  $\varepsilon_\tau = O(\tau^{-\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}})$  нормальной аппроксимации распределения  $\sum_{i=1}^\tau X_i - \tau a$ .

При гипотезе о стационарности выборки  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  и степенном поведении дисперсии (см. соотношение (228)) (в дальнейшем эту гипотезу будем называть основной) приведем метод вычисления меры соответствия этой гипотезе. Выберем целочисленный интервал  $T = \{\tau \in \mathbb{Z}_+ : \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$ , такой что  $\tau_1 \gg 1$  и  $n/\tau_2 \gg 1$ .

Если для значительного числа точек  $\tau$  интервала  $T$  (далее, мы формализуем, что это значит) удастся установить на некотором уровне значимости  $e$ , что выборка  $(X_j^{(\tau)}, j = 1, \dots, [n/\tau])$  явля-



ется фрактальным шумом, то это и будет подтверждать основную гипотезу для выборки  $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ .

Пусть  $X$  — произвольное подмножество множества  $\mathbb{Z}_+$ , через  $l(X)$  будем обозначать число целых точек множества  $X$ . Для каждого значения  $\tau$  из интервала  $T$  найдем реально достигнутый уровень значимости:  $\varepsilon(\tau)$  (см. пункт 6.2). Заранее выберем некоторый уровень значимости  $e$ . Из интервала  $T$  выделим подмножество  $S = \{\tau \in T : \varepsilon(\tau) > e\}$ . Определим отношение  $M_e = l(S)/l(T)$ . В дальнейшем значение  $M_e$  будем называть мерой соответствия основной гипотезе (о стационарности выборки  $(X_k)_{k=1,\dots,n}$  и степенном поведении дисперсии). Отметим, что при уровне значимости  $e$  принимается  $M_e \cdot 100\%$  (от общего числа  $l(T)$ ) гипотез о том, что последовательность  $(X_j^{(\tau)}, j = 1, \dots, [n/\tau])$  для каждого  $\tau \in S$  является фрактальным шумом. Следовательно, достаточно большое значение  $M_e$  (скажем, более 0.05) свидетельствует в пользу принятия основной гипотезы для исследуемого ряда наблюдений  $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ .

В настоящей главе исследуется выборка объемом  $n = 500001$ , при этом  $\tau$  выбирается из промежутка  $T = [100, 1000]$ . В этом случае  $m = [n/\tau] \geq 500$  и  $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) \geq 51$  (см. пункт 6.1). Значение  $e$  будем выбирать равным 0.05. Отметим, во-первых, что увеличение  $\tau_2$  (правой границы интервала  $T$ ) может привести к значительной погрешности при вычислении  $\varepsilon(\tau_2)$ , возникающей при замене распределения статистики Пирсона на распределение  $\chi^2$ , и, во-вторых,

уменьшение  $\tau_1$  (левой границы интервала  $T$ ) может привести к значительному отклонению распределения  $\sum_{i=1}^{\tau_1} X_i - \tau_1 a$  от нормального закона, а также отклонению  $\langle (\sum_{i=1}^{\tau_1} X_i - \tau_1 a)^2 \rangle$  от  $\sigma^2 \tau_1^{2H}$ .

Заметим, что из-за отсутствия точных оценок нормальной аппроксимации распределения  $\sum_{i=1}^{\tau} X_i$  и оценок скорости сходимости в теореме Пирсона не представляется возможным выбрать интервал  $T_0$ , для которого  $\min_{\tau \in T_0} \varepsilon(\tau)$  определит реально достигнутый уровень значимости при проверке вышеприведенной основной гипотезы. Поэтому рассматривается достаточно широкий интервал  $T$ , границы которого определяются априорными соображениями о «накоплении нормальности» и «корректности применения критерия Пирсона». На этом интервале  $M_e$  показывает относительное число всех превышений заранее заданного уровня значимости  $e$  в множестве  $\{\varepsilon(\tau) : \tau \in T\}$ , при этом величина  $M_e$  (как это отмечено выше) определяет уровень соответствия основной гипотезе.

### 6.3.3 Метод моделирования стационарного шума

Пусть  $(Y_k; k = 1, \dots, n)$  — некоторая центрированная стационарная последовательность случайных величин с ковариационной функцией  $\gamma(l)$ ,  $l = 0, \dots, n - 1$ . Обозначим через  $F$  распределение случайной величины  $Y_1$ . Будем моделировать стационарную последовательность с маргинальным распределением  $F$  и ковариационной функцией  $\gamma(l)$ ,  $l = 0, \dots, n - 1$  методом обратной функции (см.,

например, [28], [29])

Положим  $Y_k^* = F^{-1}(\Phi_{0,1}(g(k)))$ ,  $k = 1, \dots, n$ , где  $\Phi_{0,1}$  — функция распределения стандартного нормального закона,  $(g(k); k = 1, \dots, n)$  — некоторая стационарная гауссовская последовательность с нулевым средним, единичной дисперсией и ковариационной функцией  $\theta(l)$ ,  $l = 0, \dots, n-1$ ,  $F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}$  — квантильное преобразование функции  $F$ . Отметим, что распределения случайных величин  $Y_1^*$  и  $Y_1$  совпадают. Очевидно, что для ковариационной функции  $\gamma^*(l) = \langle Y_1^* Y_{l+1}^* \rangle$ ,  $l = 0, \dots, n-1$  последовательности  $(Y_k^*)$  выполняется соотношение:

$$\gamma^*(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(\Phi_{0,1}(u)) F^{-1}(\Phi_{0,1}(v)) f_{\theta}(u, v) dudv, \quad (232)$$

где  $f_{\theta}$  — плотность распределения двумерного гауссовского вектора с нулевыми средними, единичной дисперсией компонент и коэффициентом корреляции между компонентами  $\theta = \theta(l)$ . Отметим, что интеграл (232) с помощью замены

$$u = x\sqrt{(1+\theta)/2} + y\sqrt{(1-\theta)/2},$$

$$v = x\sqrt{(1+\theta)/2} - y\sqrt{(1-\theta)/2}$$

приводится к более удобному для вычислений виду

$$\gamma^*(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F^{-1}(\Phi_{0,1}(u)) F^{-1}(\Phi_{0,1}(v)) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy.$$

Если удастся подобрать гауссовскую последовательность

$(g(k); k = 1, \dots, n)$ , такую что  $\gamma^*(l) = \gamma(l)$  для всех  $l = 0, \dots, n - 1$ , то можно говорить о том, что  $(Y_k^*)$  моделирует последовательность  $(Y_k)$  (совпадают маргинальные распределения и ковариационные функции).

Отметим, что нам неизвестно маргинальное распределение  $F$  и ковариационная функция  $\gamma$ . Поэтому  $F$  мы заменим на эмпирическую функцию распределения  $F_n$ , построенную по выборке  $(Y_k; k = 1, \dots, n)$ , а функцию  $\gamma(l)$  заменим на ее оценку  $\gamma_n(l) = \frac{1}{n-l} \sum_{k=1}^{n-l} Y_k Y_{k+l}$ , где  $l = 0, \dots, m$ . Далее, рассмотрим соотношение (232) как уравнение относительно  $\theta$ , в котором в качестве левой части возьмем  $\gamma_n(l)$ . Решение этого уравнения обозначим через  $\theta_n(l)$ ,  $l = 0, \dots, m$ . Отметим, что положительная определенность матрицы  $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,m+1}$ , где  $a_{ij} = \theta_n(|i - j|)$  обеспечивает существование гауссовской последовательности  $(g_n(k))$  и, стало быть, возможность моделирования методом обратной функции.

Значение  $m$  подбирается так, что выполняются следующие два условия: во-первых,  $n - m \gg 1$  и, во-вторых,  $m \gg 1$ . Первое условие должно обеспечить близость оценки  $\gamma_n(l)$  к истинному значению  $\gamma(l)$ . В итоге получаем последовательность  $Y_k^* = F_n^{-1}(\Phi_{0,1}(g_n(k)))$ ,  $k = 1, \dots, m + 1$ . Второе условие обеспечивает достаточно большой объем выборки  $(Y_k^*)$ . Объединим вышесказанное в этом разделе в методе 3.

Пусть имеется стационарный ряд наблюдений  $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ . Через

$\beta^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a^*)^2}$  обозначим оценку стандартного отклонения  $\beta = \sqrt{\langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2}$ .

### Метод 3:

1. Находим оценки  $a^*$  и  $\beta^*$  параметров  $a$  и  $\beta$  соответственно.
2. Центрируем и нормируем последовательность  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$  с помощью  $a^*$  и  $\beta^*$  соответственно, получаем последовательность  $(Y_k)_{k=1, \dots, n}$ .
3. Выбираем  $m$ , так что  $n - m \gg 1$  и  $m \gg 1$ .
4. Находим  $\gamma_n(l) = \frac{1}{n-l} \sum_{k=1}^{n-l} Y_k Y_{k+l}$ , где  $l = 0, \dots, m$ .
5. Решаем уравнение (232) относительно  $\theta$ , получаем последовательность  $\theta_n(l)$ ,  $l = 0, \dots, m$ .
6. Для матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, m+1}$ , где  $a_{ij} = \theta_n(|i - j|)$  находим ортогональную матрицу  $C$  и диагональную  $D$ , такие что  $C^T A C = D$ . Вычисляем  $B = \sqrt{D}$ .

7. Моделируем гауссовский вектор  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m+1})$  с независимыми стандартными нормальными компонентами.
8. Находим вектор  $g_n = (g_n(k))_{k=1, \dots, m+1}$  следующим образом:  

$$g_n^T = (CB)\eta^T.$$
9. По выборке  $(Y_k)_{k=1, \dots, n}$  определяем квантильное преобразование  $F_n^{-1}$  функции распределения  $F_n$ .
10. Находим последовательность  $Y_k^* = F_n^{-1}(\Phi_{0,1}(g_n(k)))$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ .
11. Моделируем последовательность  $X_k$  таким образом:  $X_k = \beta^* Y_k^* + a^*$ ,  $k = 1, \dots, m+1$ .

#### 6.3.4 Метод моделирования нестационарного шума

Напомним, что мы имеем выборку  $(\rho_k)_{k=1, \dots, n}$ . Формируем выборку  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$ , зависящую от  $\nu$ . Используя схему проверки адекватности модели (см. раздел 6.2), применяя методы 1–2, находим оценку  $\nu^*$  параметра  $\nu$ . В итоге получаем выборку  $(X_k)_{k=1, \dots, n}$ , определяемую значением  $\nu^*$ . Применяя метод 3, моделируем стационарную последовательность  $(X_k)_{k=1, \dots, m+1}$ , где  $m$ , такое что  $n - m \gg 1$  и

$m \gg 1$ . Далее, моделируем нестационарный шум  $(\rho_k)$

$$\rho_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, \dots, m+1. \quad (233)$$

#### 6.4 Численные результаты

Рассматривается выборка  $(\rho_k)_{k=1, \dots, n}$  объемом  $n = 500001$ , состоящая из значений плотности плазмы, измеренных в последовательные моменты времени с шагом 1 мкс.

В таблице 1 для части значений параметра  $\nu$  приведены реально достигнутые уровни значимости  $\varepsilon(\tau, \nu)$  критерия Пирсона при  $490 \leq \tau \leq 510$  (напомним, что весь исследуемый диапазон  $T = [100, 1000]$ ). Кроме того, в последних двух строках для каждого  $\nu$  приведено значение меры соответствия  $M_e$  (см. раздел 6.3.2), обозначим его через  $M_e(\nu)$ , где  $e = 0.05$  (реализована схема оценки адекватности модели (см. раздел 6.2) с применением методов 1 и 2). Отметим, что, например, в случае  $\nu = 0.058$  получены достаточно высокие реально достигнутые уровни значимости, минимальный из которых равен 0.005.

Таблица 1. Реально достигнутый уровень значимости  $\varepsilon(\tau, \nu)$  критерия Пирсона

$\tau$	$\nu$								
	0	0.02	0.057	0.058	0.059	0.06	0.061	0.062	0.09
490	0.000	0.000	0.129	0.118	0.306	0.233	0.110	0.043	0.014
491	0.000	0.000	0.025	0.026	0.040	0.001	0.021	0.150	0.001
492	0.000	0.000	0.254	0.138	0.048	0.270	0.227	0.036	0.003
493	0.000	0.000	0.042	0.035	0.011	0.034	0.053	0.023	0.000
494	0.000	0.010	0.182	0.298	0.262	0.200	0.196	0.196	0.134
495	0.000	0.063	0.035	0.037	0.042	0.027	0.034	0.042	0.110
496	0.000	0.000	0.124	0.213	0.167	0.034	0.123	0.335	0.017
497	0.000	0.000	0.295	0.293	0.210	0.300	0.341	0.200	0.022
498	0.000	0.000	0.059	0.045	0.045	0.054	0.060	0.209	0.017
499	0.000	0.000	0.103	0.103	0.117	0.069	0.046	0.063	0.000
500	0.000	0.000	0.076	0.107	0.108	0.111	0.008	0.072	0.000
501	0.000	0.000	0.200	0.360	0.492	0.271	0.449	0.336	0.002
502	0.000	0.000	0.413	0.533	0.778	0.336	0.449	0.590	0.030
503	0.000	0.000	0.047	0.092	0.051	0.019	0.008	0.021	0.000
504	0.000	0.000	0.014	0.013	0.002	0.005	0.005	0.011	0.001
505	0.000	0.000	0.003	0.005	0.007	0.029	0.012	0.029	0.000
506	0.000	0.000	0.090	0.047	0.105	0.059	0.005	0.040	0.003
507	0.000	0.000	0.408	0.521	0.461	0.277	0.228	0.491	0.003
508	0.000	0.000	0.002	0.007	0.014	0.011	0.018	0.038	0.000



509	0.000	0.000	0.032	0.006	0.023	0.048	0.023	0.049	0.000
510	0.000	0.000	0.279	0.101	0.035	0.008	0.092	0.004	0.038
$M_{0.05}$	0.029	0.081	0.292	0.274	0.271	0.269	0.274	0.271	0.139

Обозначим точку максимума функции  $y = M_e(\nu)$  через  $\nu^*(e)$ . Рис. 2 иллюстрирует тот факт, что функция  $y = M_e(\nu)$ , для уровня  $e$  равного 0.05, достигает максимального значения 0.292 при  $\nu = 0.057$ . Поэтому получаем, что  $\nu^*(0.05) = 0.057$ , при этом  $H^* = 0.727$ ,  $a^* = 0.084$ ,  $\beta^* = 0.050$  и  $\sigma^* = 0.068$ . Заметим, что усредненный уровень значимости  $\bar{\varepsilon}(\nu^*(0.05)) = \frac{1}{901} \sum_{\tau=100}^{1000} \varepsilon(\tau, \nu^*(0.05))$  равен 0.072. Отметим, что при  $0.01 \leq e \leq 0.1$  значение точки максимума  $\nu^*(e)$  находится в интервале  $[0.057, 0.066]$ , т. е. получаем диапазон возможных значений параметра  $\nu$ .

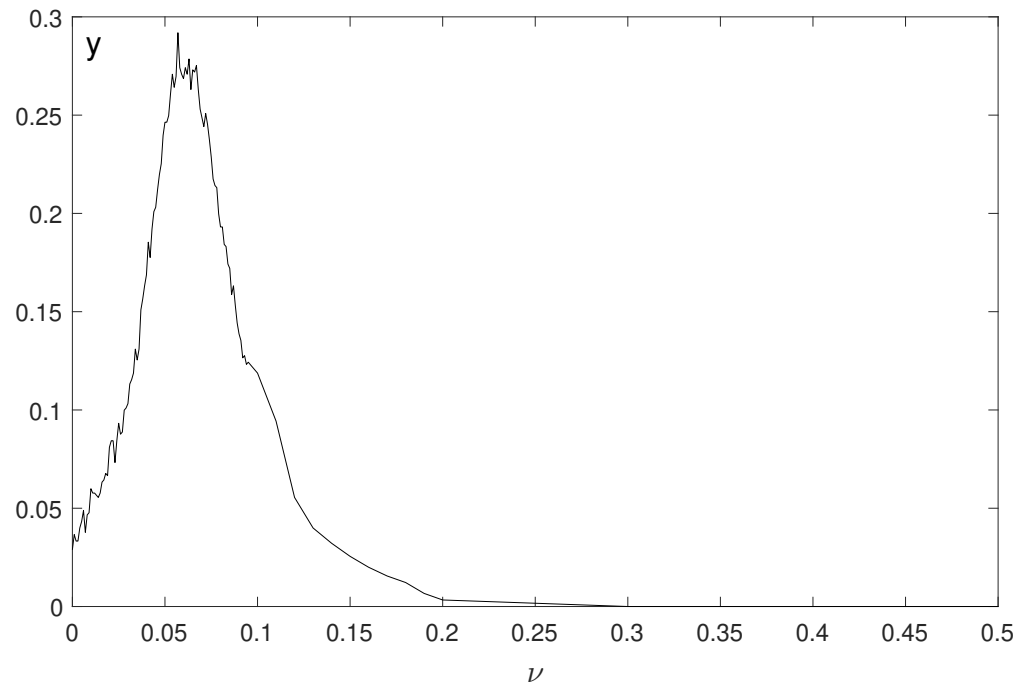


Рис. 2. График меры соответствия,  $y = M_{0.05}(\nu)$ ,  $0 \leq \nu \leq 0.5$ .

Приведем график  $\varepsilon = \varepsilon(\tau, \nu^*(0.05))$ ,  $\tau \in T$ , где  $T = [100, 1000]$  (см. рис. 3). Этот график иллюстрирует, что на интервале  $279 \leq \tau \leq 1000$  наблюдаются достаточно большие реально достигнутые уровни значимости.

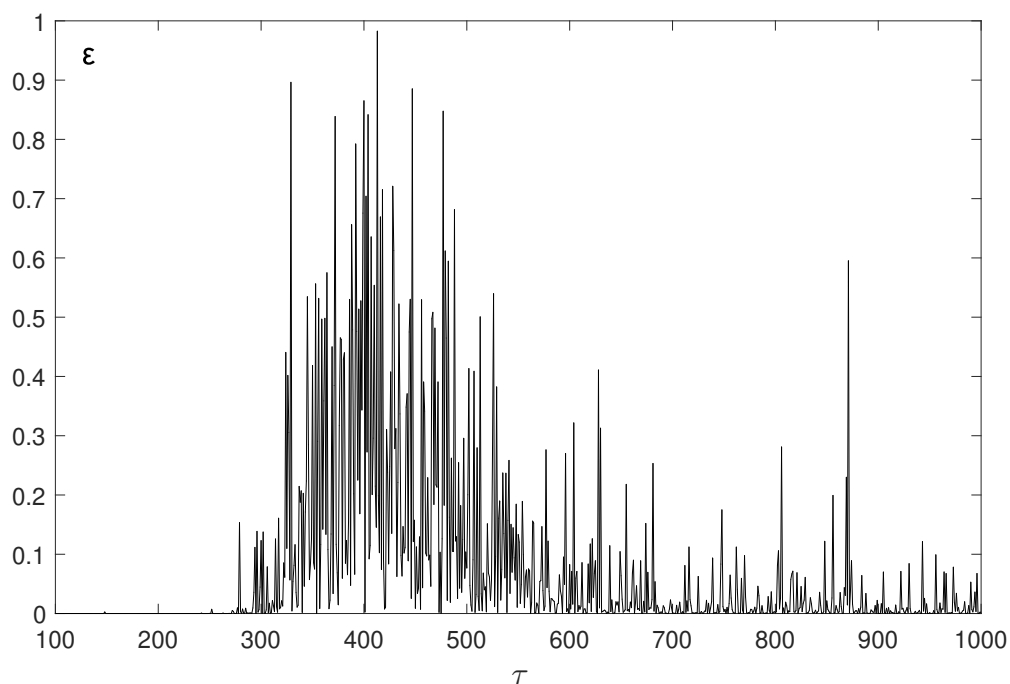


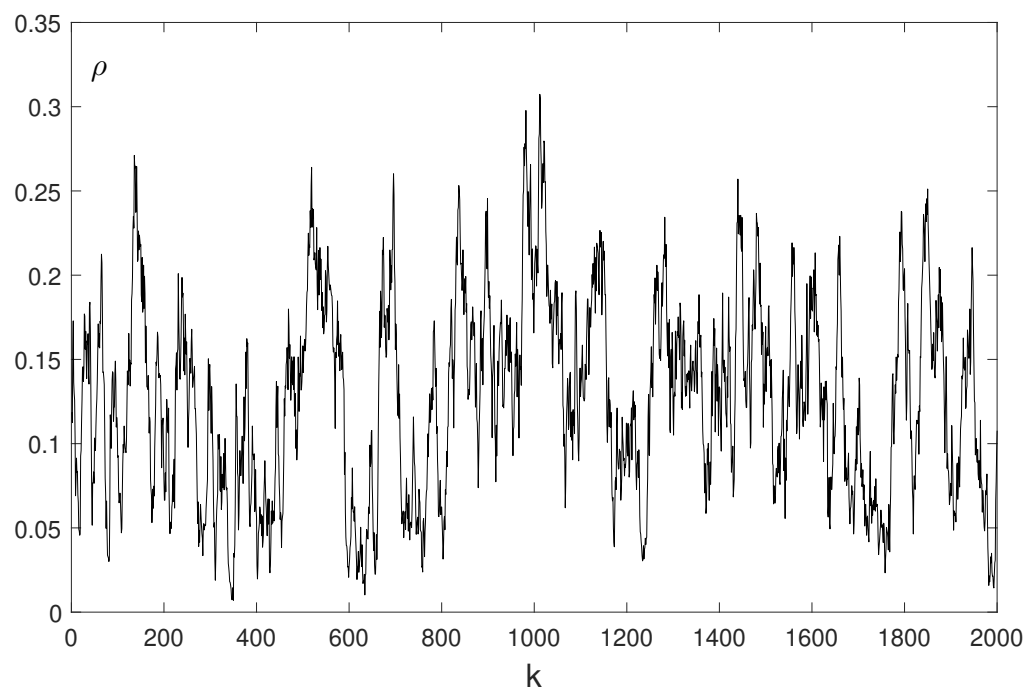
Рис. 3. График реально достигнутых уровней значимости,

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau, 0.057), \tau \in [100, 1000].$$

**Замечание 6.2.** Пусть  $X = (X_k)_{k=1, \dots, n}$  — выборка, определяемая значением  $\nu = \nu^*(0.05)$ . Обозначим через  $F_n$  эмпирическую функцию распределения этой выборки, кроме того, пусть  $\Phi_{a^*, \beta^*}$  — функция распределения нормального закона с параметрами  $a^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  и  $\beta^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - a^*)^2}$ . Находим значение  $D_n$  статистики Колмогорова:  $D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - \Phi_{a^*, \beta^*}(x)| = 25.22$ . Это означает, что можно говорить о существенном отличии распределения  $X_1$  от нормального распределения. Отметим, что для выборки  $X' = (X_k - X_{k-1})_{k=2, \dots, n}$  коэффициент эксцесса равен 12.84 (для нормального распределения этот коэффициент равен 3), т. е. в

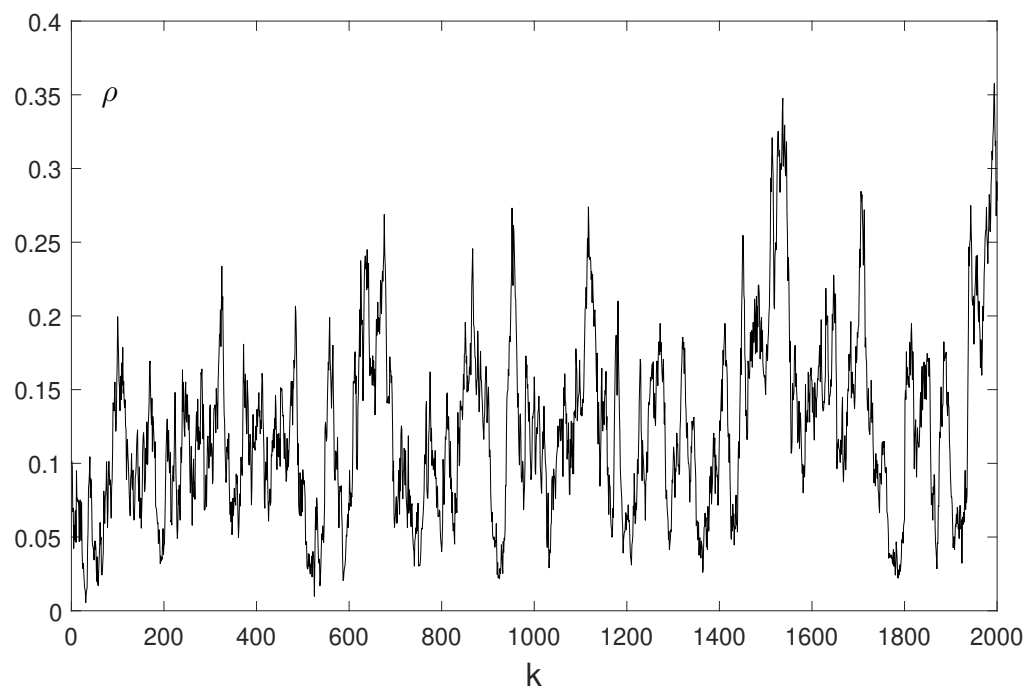
данном случае можно надеяться на аппроксимацию эмпирического распределения выборки  $X'$  сдвиг-масштабной смесью нормальных распределений (см. [20, §2.3], [3]).

Применим полученные методы к моделированию временного ряда значений плотности плазмы. Выбрав  $m = 2000$  будем моделировать, используя метод 3, последовательность  $(X_k)_{k=1, \dots, m+1}$ . Далее, получаем последовательность  $(\rho_k)_{k=1, \dots, m+1}$  (см. соотношение (233)). Приведем графики реализации такой последовательности (см. рис. 4 и 5).



*Рис. 4. График смоделированного временного ряда,*

$$\rho = (\rho_k)_{k=1, \dots, 2001}.$$

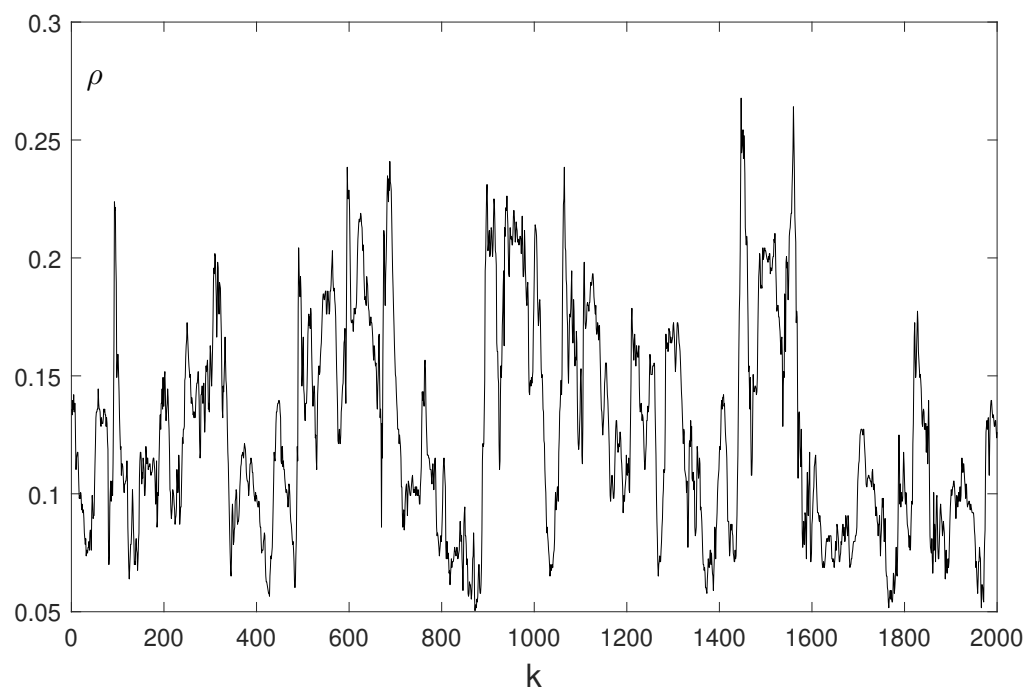


*Рис. 5. График смоделированного временного ряда,*

$$\rho = (\rho_k)_{k=1, \dots, 2001}.$$

Приведем визуальный анализ графиков, представленных на рис. 4 и 5 (напомним, что соответствующие временные ряды смоделированы, используя весь временной ряд плотности плазмы). График на рис. 5 (в отличие от графика на рис. 4 иллюстрирует слабую нестационарность, характерную для графика всего реального временного ряда (см. рис. 6) (здесь также наблюдается слабо возрастающая тенденция). График на рис. 4 подобен графику реального временного ряда плотности плазмы, состоящего из первых 2000 наблюдений (см. рис. 6). Подводя итог, с учетом меры соответствия  $M_{0.05}(0.057) = 0.292$ , можно говорить о нестационарном режиме по-

ведения реального временного ряда плотности плазмы (при этом не всегда возможно выделить возрастающую тенденцию в течение первых 2 мс).



*Рис. 6. График реального временного ряда плотности плазмы (первые 2000 наблюдений).*

Заметим, что ключевым моментом в методе 3 является, во-первых, численное решение уравнения (232) относительно  $\theta$  и получение последовательности  $(\theta(k))_{k=0,\dots,m}$ , а, во-вторых, проверка положительной определенности матрицы  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m+1}$ , где  $a_{ij} = \theta(|i - j|)$ . Отметим, что собственные числа матрицы  $A$  изменяются в диапазоне (0.01, 28.92).

## 6.5 Модель блуждания

Построим блуждание  $Z_n = \sum_{k=1}^n \rho_k$ ,  $n \geq 0$ , где  $\rho_k$  определено в (229). При дополнительных ограничениях на  $(X_i)$  (достаточно дополнительно к (228) потребовать существование спектральной плотности для этой последовательности см. [77, следствие 1]) выполняется соотношение

$$\langle Z_n^2 \rangle - \langle Z_n \rangle^2 \sim \sigma^2 s_{\nu, H}^2 n^\alpha, \quad n \rightarrow \infty, \quad (234)$$

где  $\alpha = 2\nu + 2H$ ,  $s_{\nu, H}^2 = \frac{\nu^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) u^{\nu-1} v^{\nu-1} dudv$ , константа  $\sigma$  определена в соотношении (228). Заметим, что справедливость приведенной эквивалентности следует из того, что  $Z_n - \langle Z_n \rangle$  аппроксимируется в определенном смысле гауссовским процессом  $\sigma \int_0^n B_H(n-s) s^{\nu-1} ds$ , где  $B_H$  – фрактальное броуновское движение.

Выше получено, что  $\nu^* = 0.057$  и  $H^* = 0.727$ , следовательно, оценка  $\alpha^*$  показателя  $\alpha$  для выборки значений плотности плазмы равна 1.569, что означает супердиффузионный режим переноса.

## 6.6 Результаты главы 6

В настоящей главе представлена модель нестационарного шума и проверена адекватность этой модели на ее соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки. Получены достаточно высокие

реально достигнутые уровни значимости (см. таблицу 1), по совокупности которых можно говорить об адекватности предложенной модели. Приведен метод моделирования временного ряда значений плотности плазмы, основанный на известном методе обратной функции моделирования негауссовских процессов. Отметим также, что получен степенной закон изменения по времени дисперсии процесса частичных сумм временного ряда значений плотности плазмы с показателем  $\alpha^* = 1.569$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении приведены основные результаты работы, составляющие научную новизну, теоретическую и практическую значимость, кроме того, обоснована достоверность результатов.

### Научная новизна

1. Математическое моделирование аномальных процессов переноса основано на двух свойствах. Первое — это наличие сингулярных зон в фазовом пространстве, существенно влияющих на процесс переноса (например, зоны залипания). Второе — возникновение фрактальной структуры в этих сингулярных зонах, причем фрактальность связана со свойством масштабной инвариантности упомянутых процессов. Ранее ставился вопрос о поиске универсального формата аномальных процессов переноса, реализующего упомянутые свойства. Общим свойством этих процессов является специфичность топологии сингулярных зон фазового пространства. Эта специфичность связана с алгоритмом моделирования сингулярных зон. В настоящей работе построены геометрические структуры фазового пространства, в которых сингулярные зоны моделируются самоподобными множествами, являющимися инвариантами конечных систем итерированных отображений.

2. В целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса на фрактальных структурах ставился вопрос о математическом обосновании соответствующих процессов блуждания. В настоящей работе, на основании структурного анализа упомянутых процессов, в частности анализа их сингулярных зон и показателя степенного изменения дисперсии, построена модель случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой, формализующая условия, налагаемые на дисперсию и сингулярные зоны.
3. На основе модели случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой, соответствующей аномальным процессам переноса на фрактальных структурах, реализована информационная модель аномальной диффузии, имеющая в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. С помощью этой информационной модели получена динамическая модель деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии. Более того, установлено, что соответствующие динамические соотношения являются аналогом уравнений динамики, определяющих взаимодействие фотона и электрона в известном эффекте Комптона. Динамика деформации процесса классической диффузии в аномальную исследована впервые.
4. В рамках феноменологии потока памяти построена модель слу-

чайного блуждания, которая реализует как суб- так и супердиффузионный режим переноса. Конечность момента второго порядка для всех режимов блуждания отличает предлагаемую модель от моделей дробной кинетики, где используется феноменология дробного закона Фика, при этом в супердиффузионном режиме применяется техника устойчивых распределений с бесконечным вторым моментом. Вместе с тем в большинстве приложений нет оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс и, как следствие, об ограниченности приращений наблюдаемых процессов. Разработан метод, который по известным независимым выборкам позволяет оценивать адекватность обозначенной выше модели по ее соответствию реальным данным, а также вычислять управляющие параметры модели, интерпретируемые как параметры нелокальности по времени и пространству.

5. В рамках феноменологии потока памяти построена модель нестационарного шума. Проверена адекватность этой модели на ее соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки (Токамак Т-10). Получены высокие реально достигнутые уровни значимости, по совокупности которых можно говорить об адекватности предложенной модели, более того, предложен-

ный вероятностно-статистический подход позволяет дать теоретическое и практическое обоснование адекватности построенной модели на основании минимальных предположений о структуре изучаемых данных. При этом модель имеет конструктивный характер, на ее основе разработан имитационный алгоритм моделирования временного ряда плотности плазмы термоядерного реактора. Полученная модель является первой моделью, которая позволяет вычислять для временных рядов плотности плазмы параметры, интерпретируемые как параметры нелокальности, один из которых отвечает за пространственную нелокальность действия среды на частицу, а второй — за наличие памяти.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Полученные результаты дают ответы на открытые вопросы по формализации аномальных процессов переноса и построению информационной модели блуждания на множествах с самоподобной структурой, реализующей прогноз динамики формирования аномальных режимов переноса. Вместе с тем разработанные модели и алгоритмы анализа данных позволяют исследовать временные ряды, полученные в результате наблюдения за обозначенными процессами, в частности, временные ряды плотности плазмы термоядерного реактора (Токамак Т-10), что позволяет говорить об их практической значимости.

### **Степень достоверности результатов**

Результаты диссертации подтверждаются их совпадением в частных случаях с результатами расчетов, выполненных другими авторами и с помощью других методов. Теоретические результаты опубликованы в ведущих журналах, докладывались на крупных международных конференциях и представлены в их публикациях.

**На защиту выносятся** совокупность результатов по исследованию вопросов анализа структурных данных аномальных процессов переноса, включая два основных направления исследований, одно из которых связано с построением информационной модели, реализующей динамические соотношения формирования суб- и супердиффузионного режимов переноса, другое связано с построением модели анализа временных рядов, полученных в результате наблюдения за аномальными процессами переноса.

## Список литературы

- [1] Акилов Г. П., Канторович Л. В. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
- [2] Аркашов Н. С., Борисов И. С. Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. мат. журнал. — 2004. — Т. 45, №6. — С. 1221–1255.
- [3] Батанов Г. М., Горшенин А. К., Королев В. Ю., Малахов Д. В., Скворцова Н. Н. Эволюция вероятностных характеристик низкочастотной турбулентной плазмы // Матем. моделирование. — 2011. — Т. 23. №5. — С. 35–55.
- [4] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. — М.: Наука, 1977.
- [5] Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.
- [6] Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 82. — ВИНТИ, 1995.
- [7] Будаев В. П., Савин С. П., Зеленый Л. М. Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на

пути к определению количественных характеристик переноса // УФН. — 2011.— Т. 189, №9.— С. 905-952.

- [8] Будаев В. П., Химченко Л. Н. О фрактальной структуре осажденных пленок в токамаке // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 131, №4.— С. 711-728.
- [9] Вихман Э. Квантовая физика. — М.: Наука, 1977.
- [10] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965.
- [11] Горин Е. А., Кукушкин Б. Н. Интегралы, связанные с канторовой лестницей // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, №3. — С. 188–220.
- [12] Давыдов Ю. А. Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. — 1970. — Т. 15, №3. — С. 498–509.
- [13] Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
- [14] Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. — 2004. — Т. 174, №8. — С. 819–852.

- [15] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.
- [16] Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968.
- [17] Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. — М.: Мир, 1965.
- [18] Колокольцов В. Н. Обобщенные случайные блуждания в непрерывном времени (CTRW), субординация временами достижения и дробная динамика. — ТВП, 2008. — Т. 53, №4. — С. 684–703.
- [19] Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные относительно однопараметрической группы движений // Доклады Академии Наук СССР. — 1940. — Т. 26, №1. — С. 6–9.
- [20] Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007.
- [21] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000.
- [22] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.



- [23] Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрэн Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989.
- [24] Монин А. С., Яглом А. М. О законах мелкомасштабных турбулентных движений жидкостей и газов // УМН. — 1963. — Т. 18, №5. — С. 93–114.
- [25] Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. — 1992.— Т. 90, №3. — С. 354–368.
- [26] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
- [27] Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. — М.: Наука, 1987.
- [28] Пиранашвили З. А. Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования случайных процессов // Вопросы исследования операций. — Тбилиси: Мецниереба, 1966.
- [29] Пригарин С. М. Модели случайных процессов и полей в методах Монте-Карло. — Palmarium Academic Publishing, 2014.
- [30] Пьетронеро Л., Тозатти Э. Фракталы в физике.— М.: Мир, 1988.
- [31] Олемской А. И., Флат А. Я., Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. — 1993.— Т. 163, №12.— С. 1–50.

- [32] Розанов Ю. А. Случайные процессы. — М.: Наука, 1971.
- [33] Скороход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Вища школа, 1980.
- [34] Учайкин В. В. Автомоделная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. — 2003. — Т. 173, №8. — С. 847–876.
- [35] Учайкин В. В. Субдиффузия и устойчивые законы // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 115, №6. — С. 2113–2132.
- [36] Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991.
- [37] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1976. — Т. 4.
- [38] Халмош П. Теория меры. — М.: Мир, 1953.
- [39] Халмош П. Лекции по эргодической теории. — Ижевск: Удмуртский университет, 1999.
- [40] Хамзин А. А., Нигматуллин Р. Р., Попов И. И. Микроскопическая модель недебаевской диэлектрической релаксации. Закон Коула–Коула и его обобщение // ТМФ. — 2012.— Т. 173, №2.— С. 314–332.
- [41] Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.

- [42] Alós E., Mazet O., Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes // Ann. Probab. — 2001. — Vol. 29, №2. — P. 766–801.
- [43] Cannon M.J., Percival D.B., Caccia D.C., Raymond G.M., Bassingthwaite J.B. Evaluating scaled window variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series // Physica A. — 1997. — V. 241. — P. 606–626.
- [44] Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. — New York: Springer, 2008.
- [45] Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen // Annalen der Physik. — 1905. — V. 17, №8. — P. 549-560.
- [46] Falconer K. Fractal Geometry Mathematical Foundations and Applications. — London: Wiley, 2008.
- [47] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. — John Wiley & Sons, New York, V.2, 1971.
- [48] Gefen Y., Aharony A., Alexander S. Anomalous Diffusion on Percolating Clusters // Phys. Rev. Lett. — 1983. — V. 50, №1. — P. 77–80.
- [49] Hurst H. E., Black R. P., Sinaika Y. M. Long term storage in reservoirs. An experimental study. — London: Constable, 1965.

- [50] Hutchinson J. Fractals and Self Similarity // Indiana Univ. Math. Journal. — 1981. — Т. 30, №5. — С. 713–747.
- [51] Konstantopoulos T., Sakhanenko A. Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums // Сиб. электронные матем. известия. — 2004. — Vol. 1. — P. 47–63.
- [52] Lévi P. Processus stochastiques et mouvement Brownian. — Paris: Gauthier-Villars, 1948.
- [53] Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // J. Business. — 1963. — Vol. 36, P. 394–419.
- [54] Mandelbrot B., Van Ness J. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review. — 1968. — Vol. 10, №4, — P. 422–437.
- [55] Mandelbrot B. Fractal Geometry of Nature. — San-Francisco: Freeman, 1983.
- [56] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. — 2000. — Vol. 339, iss. 1. — P. 1–77.
- [57] Montroll E. W., Weiss G. H. Random walks on lattices. II // Journal Math. Phys. — 1965. — V. 6, №6. — P. 167–181.
- [58] Hilfer R., Anton L. Fractional master equations and fractal time random walks // Phys. Rev. E. — 1995. — V. 51, №2. — P. 848–851.

- [59] Richardson L.F. Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1926. — V.110, №756. — P.709–737.
- [60] Shlesinger M.F., Zaslavsky G.M., Klafter J. Strange kinetics (Review article) // Nature. — 1993. — V. 363. — P. 31-37.
- [61] Wiener N. Differential space // Journal Math. and Phys. Massachusetts Inst. of Technology. — 1923. — V. 2. — P. 131–174.

## Публикации по теме диссертации

### Статьи в журналах из перечня ВАК

- [62] Аркашов Н.С., Ковалевский А.П. Вероятностная модель цен на квартиры // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2012. — Т. 15, №2 (50). — С. 11–20. RSCI (ядро РИНЦ).
- [63] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об условиях формирования процессов суб- и супердиффузии на самоподобных множествах // Доклады Академии наук высшей школы РФ. — 2014. — Т. 25, №4. — С. 33–38.  
DOI 10.17212/1727-2769-2014-4-33-38
- [64] Аркашов Н. С., Лежнев Е. В. О модели случайного блуждания на ковре Серпинского // Научный вестник НГТУ. — 2015. — Т. 60, №3. — С. 83–93.  
DOI 10.17212/1814-1196-2015-3-83-93
- [65] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О моделировании аномальной диффузии методом мастер-уравнения // Доклады Академии наук высшей школы РФ. — 2016. — Т. 31, №2. — С. 7–15.  
DOI 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15
- [66] Аркашов Н. С. О гауссовской аппроксимации процессов с памятью специального вида // Научный вестник НГТУ. — 2016. — Т. 63, №2. — С. 49–60.

DOI 10.17212/1814-1196-2016-2-49-60

**Статьи в изданиях, индексируемых в базах цитирования Scopus  
и Web of Science**

- [67] Аркашов Н. С., Борисов И. С., Могульский А. А. Принцип больших уклонений для процессов частных сумм скользящих средних // Теория вероятн. и ее примен. — 2007. — Т. 52, №2. — С. 181–208. RSCI (ядро РИНЦ).

DOI 10.4213/tvp171

Arkashov N. S., Borisov I. S., Mogulskii A. A. Large Deviation Principle for Partial Sum Processes of Moving Averages // Theory of Probability and its Applications. — 2008. — V. 52, №2. — P. 181–208. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1137/S0040585X97982955

- [68] Аркашов Н. С. Новое достаточное условие в принципе инвариантности для процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, №6. — С. 949–961. RSCI (ядро РИНЦ).

Arkashov N. S. A new sufficient condition in the invariance principle for the partial sum processes of moving averages // Siberian Mathematical Journal. — 2010. — V. 51, №6. — P. 949–961. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1007/S11202-010-0094-4

- [69] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, №6. — С. 1216–1236. RSCI (ядро РИНЦ).  
Arkashov N. S., Seleznev V. A. On a random walk model on sets with self-similar structure // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — V. 54, №6. — P. 968–983. WoS, SCOPUS.  
DOI 10.1134/S0037446613060025
- [70] Аркашов Н. С. Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, №2. — С. 163–173. RSCI (ядро РИНЦ).  
DOI 10.4213/mzm9689  
Arkashov N. S. Ergodic properties of a transformation of a self-similar space with a Hausdorff measure // Mathematical Notes. — 2015. — V. 97, №2. — P. 155–163. WoS, SCOPUS.  
DOI 10.1134/S0001434615010186
- [71] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой // Теория вероятн. и ее примен. — 2015. — Т. 60, №2. — С. 209–226. RSCI (ядро РИНЦ).  
DOI 10.4213/tvp4616



Arkashov N. S., Seleznev V. A. On a Model of Sub- and Superdiffusion on Self-Similar Topological Spaces // Theory of Probability and its Applications. — 2016. — V. 60, №2. — P. 173–186. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1137/S0040585X97T987570

- [72] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О динамике стационарных процессов сдвига с канторовой структурой // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, №5. — С. 972–988. RSCI (ядро РИНЦ).

Arkashov N. S., Seleznev V. A. On the dynamics of stationary shift processes with Cantor structure // Siberian Mathematical Journal. — 2017. — V. 58, №5. — 752–764. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0037446617050020

- [73] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии // ТМФ. — 2017. — Т. 193, №1. — С. 115–132. RSCI (ядро РИНЦ).

DOI 10.4213/tmf9295

Arkashov N. S., Seleznev V. A. Formation of a relation of nonlocalities in the anomalous diffusion model // Theoretical and Mathematical Physics. — 2017. — V. 193, №1. — P. 1508–1523. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0040577917100087

- [74] Аркашов Н. С. Принцип инвариантности в форме Штрассена для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 1292–1300. WoS, SCOPUS.

DOI 10.17377/semi.2018.15.105

- [75] Аркашов Н. С. Об одном методе вероятностно-статистического анализа плотности низкочастотной турбулентной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, №3. — С. 429–440. RSCI (ядро РИНЦ).

Arkashov N. S. On a Method for the Probability and Statistical Analysis of the Density of Low Frequency Turbulent Plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — V. 59, №3. — P. 402–413. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0044466919030037

- [76] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об энергетических характеристиках процессов аномальной диффузии // ТМФ. — 2019. — Т. 199, №3. — С. 479–496. RSCI (ядро РИНЦ).

DOI 10.4213/tmf9616

Arkashov N. S., Seleznev V. A. Energy characteristics of the anomalous diffusion process // Theoretical and Mathematical Physics. — 2019. — V. 199, №3. — P. 894–908. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0040577919060096

- [77] Аркашов Н. С. Принцип инвариантности в форме Донскера для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1276–1288. WoS, SCOPUS.

DOI 10.33048/semi.2019.16.088

**Тезисы и труды конференций**

- [78] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Моделирование суб- и супердиффузии реализациями случайного блуждания на самоподобных множествах // Международная конференция по прикладному и геометрическому анализу — 2014. Тезисы. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. Самарканд, Узбекистан, 22 – 25 сентября 2014 г. С. 32.
- [79] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об одной модели формирования нелокальностей в аномальной диффузии // Марчуковские научные чтения — 2017 (MSR 2017). Тезисы. Новосибирск: Омега Принт, 2017. Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. С. 70.
- [80] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Структурирование памяти в аномальных процессах переноса // Марчуковские научные чтения — 2017 (MSR 2017): Труды Международной конференции «Марчуковские научные чтения» (25 июня — 14 июля 2017 г.). 2017. Новосибирск: ИВМиМГ СОРАН. С. 40–44.
- [81] Аркашов Н. С. Об одном методе моделирования низкочастотной турбулентной плазмы // Марчуковские научные чтения — 2019 (MSR 2019). Тезисы. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. Новосибирск, 1 – 5 июля 2019 г. С. 106–107.
- [82] Arkashov N. S. Invariance principle for partial sum processes of moving averages // IV International conference «Limit Theorems

in Probability Theory and Their Applications». Book of Abstracts. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2006. Novosibirsk, 21 – 25 August 2006. P. 7–8.

- [83] Arkashov N. S., Seleznev V. A. On the energy characteristics of the anomalous transfer processes // Международная конференция по геометрическому анализу в честь 90-летия акад. Ю. Г. Решетняка. Тезисы. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. Новосибирск, 22–28 сентября 2019 г. С. 10–11.