На правах рукописи

Аркашов Николай Сергеевич

АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ДАННЫХ АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

05.13.17 — Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования Новосибирском государственном техническом университете

Официальные оппоненты:

Войтишек Антон Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория стохастических задач, ведущий научный сотрудник

Кошкин Геннадий Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра системного анализа и математического моделирования, профессор

Соппа Михаил Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра физики и химии, профессор

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится:

7 апреля 2020 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 999.082.03 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института систем информатики им. А.П. Ершова Сибирского отделения Российской академии наук (ИСИ СО РАН) по адресу 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, 6, комн. 254.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИСИ СО РАН http://www.iis.nsk.su/files/Dissertaciya_Arkashova.pdf

Автореферат разослан: "______ "____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук Мурзин Федор Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Аномальным процессом переноса называется процесс переноса, для которого имеет место свойство «дальней зависимости» приращений соответствующего процесса блуждания. Обозначенные процессы являются *объектом исследования* настоящей диссертации.

Предмет исследования — структурные данные аномальных процессов переноса, а именно: 1) математические модели физических процессов переноса на фрактальных структурах, приведенные в целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса (см. [12], [3]), 2) информация об аномальных процессах переноса, представленная в виде временных рядов.

Цель диссертации — построение и исследование моделей анализа структурных данных аномальных процессов переноса. Упомянутые модели анализа строятся и исследуются в двух направлениях. Далее мы приведем краткое описание каждого из них.

При исследовании аномальных процессов переноса на фрактальных структурах рассматривается нарушение закона Эйнштейна линейного роста по времени среднего квадрата перемещения блуждающих частиц. В случае степенной зависимости среднего квадрата от времени выделяют два случая: супердиффузия, когда показатель степени больше единицы и частицы перемещаются, совершая «длинные полеты», и субдиффузия, когда показатель степени меньше единицы и частицы испытывают «задержки», при этом в первом случае выделяются «зоны длинных полетов», а во втором — «зоны задержки частиц», называемые сингулярными зонами. Возникает *задача структурного анализа известных моделей блуждания по множествам с самоподобной структурой* с целью их формализации и построения информационной модели, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса и обеспечивающей более глубокий анализ упомянутых моделей блуждания, в частности, реализующей прогноз динамики формирования режимов переноса. Отметим, что ранее (см. [2]) ставился вопрос о поиске универсального формата аномальных процессов переноса исходя из наличия сингулярных зон и свойства масштабной инвариантности этих процессов.

Перейдем к описанию второго направления. Рассматривается временной ряд с упомянутым выше свойством «дальней зависимости». Отметим, что процессы, протекающие на финансовых рынках и в турбулентной плазме, удовлетворяют этому свойству (см. [5]). Таким образом, возникает *задача анализа обозначенного временного ряда* и построения вероятностно-статистической модели, обеспечивающей более тонкий анализ этих данных, в частности, реализующей физическую интерпретацию и вычисление параметров, характеризующих нелокальность воздействия среды и памяти частиц.

Математическое моделирование аномальных процессов переноса частиц связано с многочисленными приложениями, например, можно привести работы К. В. Чукбара, Л. М. Зеленого, А. В. Милованова, В. П. Будаева по моделированию явлений переноса в плазме, работы Р. Р. Нигматуллина, А. И. Олемского, А. Я. Флата, посвященные концепции фрактала в физике конденсированной среды и пр. При этом в литературе имеют место два основных подхода к анализу процессов диффузии. Первый подход связан с описанием плотности распределения частиц диффузанта. Для этой плотности, при определенных предположениях, можно вывести так называемое уравнение нормальной диффузии. Второй подход связан с тем, что согласно функциональной центральной предельной теореме случайные ломаные, построенные по центрированным и нормированным суммам случайных величин, также при определенных условиях, сходятся к стандартному винеровскому процессу. Этот подход основан на описании вероятностных свойств выделенной частицы-диффузанта. Отметим, что для описания аномальной диффузии используется как первый, так и второй подход. К известным моделям аномальных процессов переноса частиц относятся модели дробной кинетики, основывающиеся на дробном законе Фика, CTRW-модели случайного блуждания и другие, построенные как обобщения уравнения Фокера-Планка (см. обзор [15]). Обозначенные модели обладают следующими недостатками. Первое, ни одна из них не претендует на общую модель подобно тому, как винеровский процесс является моделью броуновского движения (см. известную монографию Г. М. Заславского «Гамильтонов хаос и фрактальная динамика»[2]). В связи с этим отметим, что предпринимались многочисленные попытки объяснить неприменимость центральной предельной теоремы к анализу реальных случайных процессов. Например, Б. Мандельброт (см. [13]) предложил использовать вместо нормального так называемые устойчивые законы, при этом возникает условие отсутствия дисперсии у приращений рассматриваемого процесса. Тем не менее, в большинстве приложений при анализе данных нет оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс (см. [5]). Второе, дробный закон Фика, лежащий в основании дробной кинетики, и его аналоги носят формально-феноменологическую природу и не имеют такого ясного физического смысла, а также не выполняют той роли, которую играет классический закон Фика, лежащий в основе вывода уравнения нормальной диффузии. Третье, аномальность переноса определяется наличием сингулярных зон и их структурой, однако в обозначенных выше моделях отсутствуют динамические условия формирования упомянутых сингулярных зон. Кроме того, принято считать, что режим аномальности переноса (суб- и супердиффузионный) определяется «конкуренцией» пространственно-временных нелокальностей, но в указанных моделях отсутствует связь динамики процесса и меры аномальности, определяемой этой динамикой.

Далее отметим, что в теории турбулентности нет единой математической модели, позволяющей описать все многообразие эффектов, происходящих в турбулентных потоках, вследствие чего в теории турбулентности имеется большое количество феноменологических моделей, направленных на описание конкретных эффектов (см., например, обзор [7]). Вместе с тем эффекты пристеночной турбулентности в токамаках приводят к повышенному переносу плазмы поперек удерживающего ее магнитного поля — аномальной диффузии (см. [1]). Динамика аномального переноса здесь связана с движением крупномасштабных структур, называемых «блобами» или «берстами» (англ. blobs, burst), что роднит эти процессы с процессами, протекающими на финансовых рынках, где информированность участников о финансовых индексах также создает крупномасштабные структуры (см. [5]). Таким образом, можно говорить об актуальном направлении по анализу информации об аномальных процессах переноса в турбулентных потоках и финансовых рынках, построению информационных моделей, описывающих режимы переноса этих процессов и реализующих прогноз их динамики.

Резюмируя все вышесказанное, можно сделать вывод, что исследования в области математического моделирования и анализа аномальных процессов переноса далеки от своего завершения и в настоящее время активно развиваются. Диссертация направлена на разработку моделей анализа аномальных процессов переноса, которые позволяют на основании информации о «зонах задержки частиц» и «зонах длинных полетов» (зонах сингулярности) или же информации о последовательных состояниях процесса получать соотношения, отражающие динамику формирования и развития аномальных процессов переноса.

Цель работы

Целью работы является разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа структурных данных аномальных процессов переноса. В рамках указанной цели были поставлены следующие задачи.

1. Построить геометрические структуры и меры на них, моделирующие фазовые пространства и сингулярные зоны аномальных процессов переноса.

2. На основе структурного анализа и сопоставления известных моделей физических процессов переноса на фрактальных структурах построить класс процессов случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой и степенным по времени изменением дисперсии.

3. Применить построенный класс процессов случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой к формированию информационной модели, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. На основе этой модели реализовать прогноз динамики перехода от диффузионного к аномальному режиму переноса.

4. Построить класс процессов случайного блуждания на основе закона изменения импульса, определяемого действием стохастических сил, распределенных по времени функцией памяти (или, по-другому, на основе феноменологии потока памяти).

   4.1. Получить физическую интерпретацию управляющих параметров процессов из этого класса. На основе упомянутого класса реализовать информационную модель аномальной диффузии, имеющей в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. Исследовать устойчивость этой модели при изменении ее состояний.

   4.2. Получить аппроксимационные теоремы для обозначенного класса процессов. Используя эти теоремы, получить метод вычисления управляющих параметров этих процессов, а также построить статистические тесты, которые на определенном уровне значимости позволяют проверять адекватность построенной модели аномального переноса по ее соответствию экспериментальным данным.

5. Используя модель нестационарного шума, основанную на феноменологии потока памяти, разработать методологию анализа плотности плазмы термоядерной установки. В рамках этой методологии установить адекватность модели нестационарного шума по соответствию

экспериментальным данным, а также получить метод вычисления ее управляющих параметров. Получить метод имитационного моделирования временного ряда значений плотности плазмы.

Соответствие диссертации паспорту специальности

Диссертация соответствует области исследований специальности 05.13.17 — Теоретические основы информатики по п. 2 «Исследование информационных структур, разработка и анализ моделей информационных процессов и структур»; п. 5 «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений».

Методы исследования

Обоснование построенных моделей анализа структурных данных и соответствующих алгоритмов основано на применении методов геометрической теории функций, классических методах доказательства предельных теорем теории вероятностей в функциональных пространствах. При этом представленный в диссертации подход к обоснованию упомянутых моделей анализа содержит следующие четыре принципиальных момента.

1. Объединение расширяющейся системы вложенных самоподобных множеств является фазовым пространством исследуемых случайных блужданий. Параметризация этого объединения числовой прямой осуществляется с помощью непрерывной параметризации самоподобных множеств пространством последовательностей из конечного алфавита (символьным пространством).

2. Нелинейный рост по времени среднего квадрата случайных перемещений сопоставляется с тем, что топология, в которой реализуется блуждание частиц, и метрическая топология, в которой измеряются перемещения блуждающих частиц, являются неэквивалентными. Структуры неэквивалентных метрических топологий формируются, используя канторовы лестницы. В результате такого подхода реализуются геометрические модели деформации классического процесса блуждания в аномальные процессы переноса. При этом показатели степени нелинейности роста по времени среднего квадрата перемещений оказываются связанными с размерностями Хаусдорфа канторовых множеств, на которых моделируется блуждание.

3. Деформации классического процесса блуждания в аномальные процессы переноса ставится в соответствие деформация стационарных процессов. Соотношение между спектральными плотностями соответствующих стационарных процессов позволяет сформулировать динамические уравнения взаимодействия диффундирующих частиц с внешней средой.

4. Взаимодействие диффундирующих частиц с внешней средой моделируется с помощью стационарной последовательности, при этом память частицы о предыдущих воздействиях моделируется с использованием феноменологии потока памяти. Такой подход приводит к случайному блужданию с нестационарными приращениями. Аппроксимация этого случайного блуждания гауссовским процессом лежит в основе полученных в работе алгоритмов анализа временных рядов.

Основные результаты (приведены ссылки на статьи, опубликованные автором)

1. С использованием пространства последовательностей из конечного алфавита (символьного пространства) получен метод кодирования геометрических структур, моделирующих фазовые пространства аномальных процессов переноса [A8], [A9].

2. На основе структурного анализа математических моделей физических процессов аномального переноса на фрактальных структурах, в частности анализа параметра степенного изменения дисперсии и сингулярных зон этих процессов, построена модель случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой [A2], [A3], [A8], [A9].

3. Построена информационная модель, реализующая суб- и супердиффузионный режим переноса. На основе этой модели получена динамическая модель деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии, в частности, получены динамические соотношения формирования упомянутых режимов [A9], [A10], [A11], [A15].

4. В рамках феноменологии потока памяти построен класс случайных процессов, для представителей которого при условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим. Получена физическая интерпретация управляющих параметров процессов из этого класса как параметров, характеризующих нелокальность воздействия среды и памяти частиц. Получен метод вычисления упомянутых параметров на основе предельных теорем для процессов обозначенного класса [A1], [A4], [A5], [A6], [A7], [A12], [A13], [A16].

5. Разработана методология анализа плотности плазмы термоядерной установки, основанная на модели нестационарного шума, построенной в соответствии с феноменологией потока памяти. В рамках этой методологии проведено теоретическое обоснование адекватности используемой модели, кроме того, построен статистический тест (решающее правило) проверки адекватности модели нестационарного шума по ее соответствию экспериментальным данным. Получен метод моделирования временного ряда значений плотности плазмы, основанный на методе обратной функции моделирования негауссовских процессов [A12], [A14], [A16].

Научная новизна

1. Математическое моделирование аномальных процессов переноса основано на двух свойствах. Первое — это наличие сингулярных зон в фазовом пространстве, существенно влияющих на процесс переноса (например, зон залипания). Второе — возникновение фрактальной структуры в этих сингулярных зонах, причем фрактальность связана со свойством масштабной инвариантности упомянутых процессов. Ранее ставился вопрос о поиске универсального формата аномальных процессов переноса, реализующего упомянутые свойства. Общим

свойством этих процессов является специфичность топологии сингулярных зон фазового пространства. Эта специфичность связана с алгоритмом моделирования сингулярных зон. В настоящей работе построены геометрические структуры фазового пространства, в которых сингулярные зоны моделируются самоподобными множествами, являющимися инвариантами конечных систем итерированных отображений.

2. В целом ряде работ по физике аномальных процессов переноса на фрактальных структурах ставился вопрос о математическом обосновании соответствующих процессов блуждания. В настоящей работе, на основании структурного анализа упомянутых процессов, в частности анализа их сингулярных зон и показателя степенного изменения дисперсии, построена модель случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой, формализующая условия, налагаемые на дисперсию и сингулярные зоны.

3. На основе модели случайного блуждания по множествам с самоподобной структурой, соответствующей аномальным процессам переноса на фрактальных структурах, реализована информационная модель аномальной диффузии, имеющая в качестве возможных состояний суб- и супердиффузионный режим переноса. С помощью этой информационной модели получена динамическая модель деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии. Более того, установлено, что соответствующие динамические соотношения являются аналогом уравнений динамики, определяющих взаимодействие фотона и электрона в известном эффекте Комптона. Динамика деформации процесса классической диффузии в аномальную исследована впервые.

4. В рамках феноменологии потока памяти построена информационная модель случайного блуждания, которая реализует как суб- так и супердиффузионный режим переноса. Конечность момента второго порядка для всех режимов блуждания отличает предлагаемую модель от моделей дробной кинетики, где используется феноменология дробного закона Фика, при этом в супердиффузионном режиме применяется техника устойчивых распределений с бесконечным вторым моментом. Вместе с тем в большинстве приложений нет оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс и, как следствие, об ограниченности приращений наблюдаемых процессов. Разработан метод, который по известным независимым выборкам позволяет оценивать адекватность обозначенной выше модели по ее соответствию реальным данным, а также вычислять управляющие параметры модели, интерпретируемые как параметры нелокальности по времени и пространству.

5. В рамках феноменологии потока памяти построена модель нестационарного шума. Проверена адекватность этой модели на ее соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки (Токамак Т-10). Получены высокие реально достигнутые уровни значимости, по совокупности которых можно говорить об адекватности предложенной мо-

дели, более того, предложенный вероятностно-статистический подход позволяет дать теоретическое и практическое обоснование адекватности построенной модели на основании минимальных предположений о структуре изучаемых данных. При этом модель имеет конструктивный характер, на ее основе разработан имитационный алгоритм моделирования временного ряда плотности плазмы термоядерного реактора. Полученная модель является первой моделью, которая позволяет вычислять для временных рядов плотности плазмы параметры, интерпретируемые как параметры нелокальности, один из которых отвечает за пространственную нелокальность действия среды на частицу, а второй — за наличие памяти.

На защиту выносится совокупность результатов по исследованию вопросов анализа структурных данных аномальных процессов переноса, включая два основных направления исследований, одно из которых связано с построением информационной модели, реализующей динамические соотношения формирования суб- и супердиффузионного режимов переноса, другое связано с построением модели анализа временных рядов, полученных в результате наблюдения за аномальными процессами переноса.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные результаты дают ответы на открытые вопросы по формализации аномальных процессов переноса и построению информационной модели блуждания на множествах с самоподобной структурой, реализующей прогноз динамики формирования аномальных режимов переноса. Вместе с тем разработанные модели и алгоритмы анализа данных позволяют исследовать временные ряды, полученные в результате наблюдения за обозначенными процессами, в частности, временные ряды плотности плазмы термоядерного реактора (Токамак Т-10), что позволяет говорить об их практической значимости.

Степень достоверности результатов

Результаты диссертации подтверждается их совпадением в частных случаях с результатами расчетов, выполненных другими авторами и с помощью других методов. Теоретические результаты опубликованы в ведущих журналах, докладывались на крупных международных конференциях и представлены в их публикациях.

Апробация работы

Все разделы диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях:

- IV International Conference on Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications, Novosibirsk, 21–25 August 2006.
- Прикладной и геометрический анализ, Самарканд, Узбекистан, 22–25 сентября 2014.
- Марчуковские научные чтения, Новосибирск, 25 июня–14 июля 2017.
- Марчуковские научные чтения, Новосибирск, 1–5 июля 2019.
- International Conference on Geometric Analysis in honor of the 90th anniversary of academician Yu. G. Reshetnyak, Novosibirsk, 22–28 September 2019.

Кроме того, основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались:

- на объединенном семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики ИМ СО РАН под руководством академика А. А. Боровкова;
- на объединенном семинаре кафедры инженерной и высшей математики Новосибирского государственного технического университета под руководством профессора В. А. Селезнева;

Публикации

По теме диссертации автором опубликовано 22 работы, в том числе 16 журнальных статей, входящих в перечень ВАК, среди которых 12 статей индексируемых в базах цитирования (RSCI, SCOPUS, WoS).

Личный вклад автора

Диссертационная работа выполнена непосредственно ее автором.

В совместных работах [A4], [A6], [A10] автору диссертации принадлежат доказательства утверждений; в работе [A1] — постановка задачи, доказательство утверждений и разработка алгоритмов, интерпретация результатов расчетов; в работах [A2], [A3], [A8], [A11], [A12], [A15] — постановка задачи и доказательство утверждений. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка использованных источников из 83 наименований. Работа изложена на 277 страницах, включая 6 иллюстраций.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, перечисляются основные результаты и раскрывается их новизна.

В **главе 1** изложены теоретические основы структурного анализа, на которые опираются представленные результаты. В частности, с помощью преобразования сдвига на символьном пространстве определены стационарные процессы с траекториями всюду плотными на самоподобных континуумах с нормированной мерой Хаусдорфа. В следующих главах именно с помощью стационарных процессов будут формироваться энергетические характеристики аномальных процессов переноса, а также информация о воздействии внешней среды на диффундирующую среду в аномальных процессах переноса.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ. Выделим класс так называемых *самоподобных множеств.*

Определение 1.3 *Будем называть непустое компактное множество* A *самоподобным, если существуют такие сжимающие преобразования подобия* $T_1, \ldots, T_N$*, что имеет место такое представление*:

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(A)$$

при этом $\mu^{\dim(A)}(T_i(A)\cap T_j(A))=0$ *для всех* $i\neq j$.

Определим класс самоподобных множеств $\mathcal{S}$ таких, что $\mu^{\dim(A)}(A)=1$ для всех $A\in\mathcal{S}$. Отметим, что на пространстве с мерой $(A,\mathcal{B}_A,\mu^{\dim(A)})$, где $\mathcal{B}_A=\{B\bigcap A : B\in\mathcal{B}\}$ мы в дальнейшем будем рассматривать «объекты, имеющие вероятностный характер».

Рассмотрим самоподобное множество E, такое что $E=\bigcup_{i=1}^N T_i(E)$, где $T_1,...,T_N$ сжимающие преобразования подобия с коэффициентами $r_1,...,r_N$ соответственно. Пространство последовательностей Σ на N элементах $\{1,2,...,N\}$ определим как множество всех бесконечных последовательностей $\sigma_1\sigma_2...$, $\sigma_k\in\{1,2,...,N\}$, $k=1,2,....$ Расстояние между $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3...$ и $\tau=\tau_1\tau_2\tau_3...$ определяется следующим образом: если $\sigma_1\neq\tau_1$, то $d(\sigma,\tau)=1$; если $\sigma_1=\tau_1,...,\sigma_k=\tau_k$ и $\sigma_{k+1}\neq\tau_{k+1}$ для некоторого $k\geq 1$, то $d(\sigma,\tau)=r_{\sigma_1}...r_{\sigma_k}$ (здесь $r_{\sigma_1},...,r_{\sigma_k}$ — коэффициенты преобразований подобия $T_{\sigma_1},...,T_{\sigma_k}$ соответственно); если же $\sigma_k=\tau_k$ для всех $k\geq 1$, то $d(\sigma,\tau)=0$ (заметим, что в некоторых монографиях (см. [6]) определенное выше пространство последовательностей называется символьным пространством).

Пространство последовательностей (Σ,d) является метрическим пространством. Следующая теорема позволяет «кодировать» каждую точку из E некоторой последовательностью из пространства последовательностей (см. [11]).

Теорема 1.6 *Существует единственное непрерывное отображение* $\Phi:\Sigma\to E$, *такое что для любого* $\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3...\in\Sigma$ *выполняется*

$$\Phi(\sigma)=T_{\sigma_1}(\Phi(\sigma_2\sigma_3...)).$$

Кроме того, $\Phi(\Sigma)=E$.

Введем в рассмотрение множество

$$\begin{aligned} B_0 = &\bigcup_{1\leq i<j\leq N}(T_i(E)\cap T_j(E)) \\ &\bigcup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{1\leq i_1,i_2,...,i_m\leq N}E_{i_1,i_2,...,i_m}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где $E_{i_1,i_2,...,i_m}=\bigcup_{1\leq i<j\leq N}(T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_m}T_i(E)\cap T_{i_1}T_{i_2}...T_{i_m}T_j(E))$. Поскольку $E\in\mathcal{S}$ получаем, что $\mu^{\dim(E)}(B_0)=0$. Обозначим $\Phi^{-1}(E\backslash B_0)$ через $\Sigma_{E\backslash B_0}$. Отметим одно свойство отображения Φ.

Заметим, что, если $B_0\neq\oslash$, то прообраз $\Phi^{-1}(x)$ любой точки $x\in B_0$ состоит более чем из одной точки. Для того, чтобы избавиться от этой неоднозначности в символьном представлении, выберем в каждом из этих прообразов ровно одну любую точку, в итоге, получим множество $\Sigma_{B_0}\subseteq\Phi^{-1}(B_0)$. Обозначим $\Sigma_{B_0}\cup\Sigma_{E\backslash B_0}$ через $\Sigma^{'}$. Отображение $\Phi:\Sigma^{'}\to E$ является взаимно-однозначным. Сужение отображения Φ на множество $\Sigma^{'}$ будем обозначать через Φ_0.

В обозначении меры $\mu^{\dim(E)}(\cdot)$ в дальнейшем мы будем опускать верхний индекс. Через $\mathcal{B}_E$ обозначается σ-алгебру борелевских множеств в E. Пополним σ-алгебру $\mathcal{B}_E$, а именно, обозначим через $\mathcal{B}_E^*$ совокупность всех множеств вида $B \cup C$, где $B \in \mathcal{B}_E$ и $C \subset B_0$ (множество B_0 определено в (1)). Очевидно, что $\mathcal{B}_E^*$ является σ-алгеброй. В дальнейшем мы будем рассматривать следующее пространство с мерой: $(E, \mathcal{B}_E^*, \mu)$.

Определение 1.4 *Отображение $S : \Sigma \to \Sigma$, определенное следующим образом:*

$$S(\sigma_1\sigma_2\sigma_3...) = \sigma_2\sigma_3...,$$

называется преобразованием сдвига.

Рассмотрим отображение $\Pi = \Phi \circ S \circ \Phi_0^{-1} : E \to E$.

Теорема 1.7 *Преобразование Π, заданное на $\mathcal{B}_E^*$, является эргодическим.*

Далее, мы конкретизируем структуру каждого элемента последовательности $(\Pi^n)_{n\geq 0}$, кроме того, покажем, что, если E — множество Кантора, то $(\Pi^n)_{n\geq 0}$ имеет структуру скользящего среднего (см. ниже соотношение (4)).

Определим функцию $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$, полагая $\nu(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sigma_1$. С помощью ν определим функцию $\eta : E \to \mathbb{R}$, положив $\eta(\omega) = \nu(\Phi_0^{-1}(\omega))$. Зададим последовательность функций $\xi_n : E \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$ следующим образом: $\xi_n(\omega) = \eta(\Pi^n(\omega))$. В предложении 1.1 утверждается, что функции $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \geq 0$ являются измеримыми. Поскольку μ является вероятностной мерой, поэтому в дальнейшем функции ξ_n будем называть *случайными величинами.*

Предложение 1.1 *Функции $\xi_n : (E, \mathcal{B}^*(E), \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \geq 0$ являются измеримыми. Случайные величины $(\xi_n)_{n\geq 0}$ являются независимыми одинаково распределенными, при этом ξ_0 имеет равномерное распределение на множестве $\{1, 2, \dots, N\}$. Кроме того, для всех $\omega \in E \setminus B_0$ выполняется равенство*

$$\Pi^n(\omega) = \Phi(\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots). \tag{2}$$

Выделим из класса самоподобных множеств класс канторовских множеств $\{S_\alpha\}_{0<\alpha<1/2}$ на отрезке $[0, 1]$. Множество S_α определяется двумя преобразованиями подобия $T_1(x) = \alpha x$ и $T_2(x) = \alpha x + 1 - \alpha$, такими что $S_\alpha = T_1(S_\alpha) \cup T_2(S_\alpha)$ и $T_1(S_\alpha) \cap T_2(S_\alpha) = \emptyset$. Заметим, что множество $S_{1/3}$ — классическое множество Кантора.

Лемма 1.1 *Отображение Φ пространства (Σ, d) на множество $S_\alpha, 0 < \alpha \leq 1/2$ имеет вид:*

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\sigma_{j+1} - 1). \tag{3}$$

Из (2) и (3) выводим, что преобразование Π^n множества S_α можно представить в виде

$$\Pi^n = (1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (\xi_{n+j}^{(\alpha)} - 1), \tag{4}$$

где $0 < \alpha \leq 1/2$, $(\xi_n^{(\alpha)})$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (индексом α будем подчеркивать, что случайные величины заданы на вероятностном пространстве $(S_\alpha, \mu_\alpha, \mathcal{B}^*(S_\alpha))$, напомним, что $\mu_\alpha = \mu^d$, $d = -\ln 2/\ln\alpha$). Из предложения 1.1 следует, что $\mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 1) = \mu_\alpha(\xi_0^{(\alpha)} = 2) = 1/2$. Отметим, что процесс (Π^n) является стационарным процессом в узком смысле.

В первой главе исследуются свойства преобразований самоподобного континуума, когда эти преобразования полусопряжены преобразованию сдвига на символьном пространстве, кодирующем этот самоподобный континуум. Устанавливается, что последовательность композиций преобразования из указанного класса преобразований является стационарным процессом на самоподобном континууме с нормированной мерой Хаусдорфа.

В **главе 2** на основе анализа условий, предполагаемых выполненными для частицы, блуждающей по самоподобному множеству (см. [12], [3], [10]), строится модель случайного блуждания, порожденного аномальным процессом переноса. Сформулируем эти условия. Частица блуждает по некоторым структурным элементам самоподобного множества, при этом траектория, по которой движется частица, параметризуется числовой прямой и имеет размерность d_0. Для частицы, начинающей блуждание из начала координат, средний квадрат расстояния до начала координат в момент времени n ведет себя пропорционально n^{1/d_0} при $n \to \infty$.

Суть метода построения модели в следующем. При параметризации (кодировании) с помощью символьной динамики множеств с самоподобной структурой мы рассматриваем последовательность сумм независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с соответствующим числом моментов, представляющую случайное блуждание на этой прямой.

Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Пусть $d \geq 0$, через $\mu^d(A)$, как и в предыдущей главе, обозначим d-мерную меру Хаусдорфа множества A. Хаусдорфову размерность множества A мы будем обозначать через $\dim(A)$. Борелевскую σ-алгебру множеств в X будем обозначать через $\mathcal{B}$. Пусть $T_i,\ i = 0, ..., m$ — сжимающие преобразования подобия с коэффициентом r, где m — некоторое фиксированное целое значение, превосходящее 0. Мы имеем непустое компактное множество A_0, обладающее свойством

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^{m} T_i(A_0).$$

Обозначим через x_0 и x_m — неподвижные точки преобразований T_0 и T_m соответственно, будем рассматривать случай, когда $x_0 \neq x_m$. В дальнейшем будем считать, что выполняется одно из условий:
1)

$$T_i(x_0) = T_{i-1}(x_m)$$

для всех $i = 1, ..., m$. Будем также считать, что

$$T_i(A_0) \cap T_j(A_0) = \begin{cases} \{T_{i'}(x_0)\} & \text{при } |i-j| = 1, \\ \varnothing & \text{при } 0 < |i-j| \neq 1, \end{cases}$$

где $i' = \max(i, j)$;
2) $T_k(A_0) \cap T_l(A_0) = \varnothing$ при всех $k \neq l$.

Определим последовательность множеств $A_j,\ j = 0, 1, ...$, положив $A_j = T_0^{-j}(A_0)$. Кроме того, определим преобразования $T_i^{(j)} := T_0^{-j} \circ T_i \circ T_0^j$, $j = 0, 1, 2, ...$ Введем в рассмотрение множество $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

Предложение 2.1 *Для каждого* $j = 0, 1, 2, ...$ *существует единственная непрерывная функция* $\Phi_j : (\Sigma, d) \to (A_j, \rho)$, *такая что для любого* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ...) \in \Sigma$ *выполняется*

$$\Phi_j(\sigma) = T_{\sigma_1}^{(j)}(\Phi_j((\sigma_2, \sigma_3, ...))).$$

Кроме того, $\Phi_j(\Sigma) = A_j$.

Определим соответствие $\Psi : [0, +\infty) \to E$ следующим образом. Любое $x \in [0, +\infty)$ можно представить в виде суммы $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i/(m+1)^{i-j}$, положим

$$\Psi(x) = \Phi_j((\sigma_1, ..., \sigma_j, \sigma_{j+1}, \sigma_{j+2}, ...)).$$

В дальнейшем будем предполагать, что существует изометрическое преобразование $S : (X, \rho) \to (X, \rho)$, такое что $S(E) \cap E$ — одноэлементное множество при этом $S(x_0) = x_0$. С помощью преобразования S доопределим Ψ на $(-\infty, 0]$:

$$\Psi(x) = S(\Psi(-x)).$$

Введем обозначение: $E' = E \cup S(E)$.

Рассмотрим случайное блуждание $S_n,\ n = 0, 1, ...$ на действительной прямой. Значение S_n для каждого n определяется суммой: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные действительнозначные случайные величины.

Последовательность сумм $S_n,\ n = 0, 1, ...$ индуцирует случайное блуждание на E', а именно: последовательность $\Psi(S_n),\quad n = 0, 1, ...$ назовем случайным блужданием на E'.

Теорема 2.1 *Пусть* $\{\xi_k,\ k = 1, 2, ..., n\}$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом* $\langle |\xi_1|^{\max(2, 2/d)} \rangle < \infty$, *где* $d = -\ln(m+1)/\ln r$. *Тогда, если* $d \leq 2$, *то выполняются следующие неравенства*

$$d_1 n^{1/d} \leq \langle \rho^2(\Psi(S_n), x_0) \rangle \leq d_2 n^{1/d}, \tag{5}$$

где d_1 *и* d_2 *— положительные константы, зависящие от распределения* ξ_1.

Если к тому же распределение ξ_1 *имеет ноль своей медианой, т. е.* $\mathbf{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1/2$, *то* (5) *выполняется и при* $d > 2$.

Во второй главе на основании анализа известных моделей блуждания по самоподобным множествам, в частности анализа параметра степенного изменения дисперсии таких блужданий, построена информационная модель случайного блуждания на самоподобных множествах, параметризуемых числовой прямой.

В **главе 3** результате анализа сингулярных зон случайных процессов, построенных во второй главе, реализована модель деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии.

Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство. Мы будем рассматривать непустое компактное множество A_0, такое что

$$A_0 = \bigcup_{i=0}^{m} T_i(A_0), \ m \geq 1. \tag{6}$$

Будем считать (как и во второй главе), что выполняется одно из условий:
1) $T_i(x_0) = T_{i-1}(x_m)$ для всех $i = 1, ..., m$. Кроме того,

$$T_i(A_0) \cap T_j(A_0) = \begin{cases} \{T_{i'}(x_0)\} & \text{при } |i-j| = 1, \\ \varnothing & \text{при } 0 < |i-j| \neq 1, \end{cases}$$

где $i' = \max(i, j)$;
2) $T_k(A_0) \cap T_l(A_0) = \varnothing$ при всех $k \neq l$.

Введем в рассмотрение непустое компактное в (X, ρ) множество B_0, удовлетворяющее следующему равенству:

$$B_0 = \bigcup_{i=0}^{s} T_{k_i}(B_0), \tag{7}$$

где $k_0 = 0$ и $0 \leq k_{i-1} < k_i \leq m, \ i = 1, ..., s$ и $1 \leq s < m$.

Заметим, что $B_0 \subset A_0$ и B_0 является несвязным. Определим последовательность множеств $B_j, \ j = 0, 1, ...$, положив $B_j = T_0^{-j}(B_0)$. Рассмотрим множество $E_0 = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Аналогично соответствию Ψ определим $\Psi_0 : [0, +\infty) \to E_0$. Напомним, мы предполагаем, что существует изометрическое преобразование $S : (X, \rho) \to (X, \rho)$, такое что $S(E) \cap E$ — одноточечное множество при этом $S(x_0) = x_0$.

С помощью преобразования S доопределим Ψ_0 на $(-\infty, 0]$:

$$\Psi_0(x) = S(\Psi_0(-x)).$$

Кроме того, обозначим

$$E_0' := E_0 \cup S(E_0).$$

На E_0' зададим метрику:

$$f_0(x, y) = |\Psi_0^{-1}(x) - \Psi_0^{-1}(y)|, \ x, y \in E_0'.$$

Метрику f_0 будем в дальнейшем называть *внутренней метрикой* на E_0'. Определим следующую функцию $\varrho_0 : E' \times E' \to \mathbb{R}$. Положим $\varrho_0(e, f) = \operatorname{diam}(\Psi_0^{-1} \circ \Psi([\Psi^{-1}(e), \Psi^{-1}(f)]))$. Псевдометрика ϱ_0 является естественным продолжением с E_0' на E' метрики f_0.

Рассмотрим случайное блуждание $S_n, \ n = 0, 1, ...$ на действительной прямой. Значение S_n для каждого n определяется суммой: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ S_0 = 0$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные действительнозначные случайные величины.

Последовательность сумм $S_n, \ n = 0, 1, ...$ индуцирует случайное блуждание на E' и на E_0', а именно: последовательности $\Psi(S_n), \ \ n = 0, 1, ...$ и $\Psi_0(S_n), \ \ n = 0, 1, ...$ назовем случайным блужданием на E' и E_0' соответственно. Заметим, что $f(\Psi(S_n), x_0) = |S_n|$ и $f_0(\Psi_0(S_n), x_0) = |S_n|$.

Теорема 3.1 *Пусть $\{\xi_k,\ k=1,2,...,n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, пусть также $d=\dim(A_0)$ и $d_0=\dim(B_0)$. Тогда, если $d/d_0\le 2$, то выполняются следующие неравенства*

$$d_1 n^{d_0/d} \le \langle \varrho_0^2(\Psi(S_n), x_0)\rangle \le d_2 n^{d_0/d}, \tag{8}$$

где d_1 и d_2 — положительные константы, зависящие от распределения ξ_1.

Если к тому же распределение ξ_1 имеет ноль своей медианой, т. е. $\mathbf{P}(\xi_1\ge 0)=\mathbf{P}(\xi_1\le 0)=1/2$, то (8) *выполняется и при $d/d_0>2$.*

Теорема 3.2 *Пусть $\{\xi_k,\ k=1,2,...,n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом $\langle|\xi_1|^{2d/d_0}\rangle<\infty$. Через d и d_0 мы по-прежнему будем обозначать размерности Хаусдорфа множеств A_0 и B_0 соответственно. Тогда выполняются следующие неравенства*

$$d_1 n^{d/d_0} \le \langle f^2(\Psi_0(S_n), x_0)\rangle \le d_2 n^{d/d_0},$$

где d_1 и d_2 — положительные константы, зависящие от распределения ξ_1.

Основным результатом третей главы являются теоремы 3.1 и 3.2. Эти теоремы устанавливают оценки на вторые моменты расстояния от блуждающей по самоподобным множествам частицы до начальной точки. Нелинейность этих оценок объясняется переходом к неэквивалентной по отношению к топологии исходного фазового пространства топологии наблюдателя и, тем самым, объясняет происхождение типа аномальной диффузии (суб- или супердиффузии). В следующей главе прогноз динамики взаимодействия диффундирующих частиц с внешней средой осуществляется именно с помощью преобразований евклидовой метрической топологии в неэквивалентные ей топологии.

В **главы 4** на основе информационной модели случайного блуждания, построенной в главах 2 и 3, строится динамическая модель деформации классической диффузии в аномальную.

Каждому множеству $K_q,\ 2<q<\infty$ соответствует непрерывная, неубывающая на отрезке $[0,1]$ функция C_q, называемая канторовой лестницей. Напомним, что для любого $z=\sum_{i=-\infty}^{-1} b_i q^i\in K_q$ (каждый b_i равен либо 0, либо $q-1$) значение $C_q(z)=\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i 2^i$, где $a_i=b_i/(q-1)$. Для $C_q(t)$, $2\le q<\infty$ выполняется следующее известное свойство d_q-однородности (масштабной инвариантности)

$$C_q(t)/q^{d_q}=C_q(t/q) \tag{9}$$

при всех $t\in[0,1]$.

Сохраняя свойство (9), продолжим $C_q(t)$ на всю положительную полуось, для этого положим $C_q(t)=2^{n+1}C_q(t/q^{n+1})$ для каждого $t\in[q^n,q^{n+1}]$, $n\ge 0$. Продолженная таким образом функция C_q обладает свойством

$$C_q(q^n t)=q^{nd_q}C_q(t) \tag{10}$$

при всех $t \geq 0$ и целых n. Положим также $C_q(t) = -C_q(-t)$ для любого $t < 0$.

Рассмотрим множество $K = \bigcup_{j=0}^{+\infty} q^j \cdot K_q$. Положим

$$K^e = -K \cup K. \tag{11}$$

Отметим, что $C_q(K^e) = \mathbb{R}$. Определим псевдометрику $\rho_q(x, y) = |C_q(x) - C_q(y)|$ и метрику $\varrho_q(x, y) = |D_q(x) - D_q(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случайное блуждание S_n, $n = 0, 1, ...$ на действительной прямой. Значение S_n для каждого n определяется суммой: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$, где ξ_i — независимые одинаково распределенные действительнозначные случайные величины.

Теорема 4.1 *Пусть $\{\xi_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда, если $d_q \geq 1/2$, то выполняются следующие неравенства*

$$c_1 n^{d_q} \leq \langle \rho_q^2(S_n, 0) \rangle \leq c_2 n^{d_q}, \tag{12}$$

где c_1 и c_2 — положительные константы, зависящие от распределения ξ_1 и константы $d_q = \ln 2 / \ln q$.

Если к тому же распределение ξ_1 имеет ноль своей медианой, т. е. $\mathbf{P}(\xi_1 \geq 0) = \mathbf{P}(\xi_1 \leq 0) = 1/2$, то (12) выполняется и при $d_q < 1/2$.

Теорема 4.2 *Пусть $\{\xi_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, при этом $\langle |\xi_1|^{2/d_q} \rangle < \infty$. Тогда выполняются следующие неравенства*

$$c_1 n^{1/d_q} \leq \langle \varrho_q^2(S_n, 0) \rangle \leq c_2 n^{1/d_q}, \tag{13}$$

где c_1 и c_2 — положительные константы, зависящие от распределения ξ_1 и константы d_q.

Теоремы 4.1 и 4.2 легко обобщаются на многомерный случай. Определим псевдометрику и метрики в пространстве $\mathbb{R}^k$:
$\rho_{k,q}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \rho_q^2(x_j, y_j)}$, $\varrho_{k,q}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \varrho_q^2(x_j, y_j)}$ и $\lambda_k(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \lambda^2(x_j, y_j)}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что схема серий случайных величин $(\xi_i^{(j)})$ удовлетворяет условию (S):

(S): *Для каждого $j = 1, \ldots, k$ последовательность $\{\xi_i^{(j)},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ является последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, при этом для разных j соответствующие последовательности независимы друг от друга.*

Определим $S_n^{(j)}$ для каждого n и j следующим образом: $S_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(j)}$, $S_0^{(j)} = 0$. Обозначим $\mathbf{S}_n = (S_n^{(1)}, \ldots, S_n^{(k)})$.

Следствие 4.1 *Пусть $d_q \geq 1/2$, тогда выполняются следующие неравенства*

$$c_{1k} n^{d_q} \leq \langle \rho_{k,q}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \leq c_{2k} n^{d_q}, \tag{14}$$

где c_{1k} и c_{2k} — положительные константы, зависящие от распределения набора случайных величин $(\xi_1^{(j)})_{j=1,\dots,k}$ и d_q. Если к тому же распределение $\xi_1^{(j)}$ при каждом $j = 1, \dots, k$ имеет ноль своей медианой, то (14) *выполняется и при $d_q < 1/2$.*

Следствие 4.2 *Пусть $\langle |\xi_1^{(j)}|^{2/d_q} \rangle < \infty$ при всех $j = 1, \dots, k$. Тогда выполняются следующие неравенства*

$$c_{1k} n^{1/d_q} \le \langle \varrho_{k,q}^2(\mathbf{S}_n, 0) \rangle \le c_{2k} n^{1/d_q}, \tag{15}$$

где c_{1k} и c_{2k} — положительные константы, зависящие от распределения набора случайных величин $(\xi_1^{(j)})_{j=1,\dots,k}$ и d_q.

В дальнейшем сингулярные зоны появляются как носители меры изменения энергии и импульса стационарных процессов сдвига. При этом процессы сдвига реализуются квазичастицами в гиперболической геометрии.

Определим последовательность $(Z_n^{(\alpha)})$

$$Z_n^{(\alpha)} = d\sqrt{2\pi\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \varepsilon_{n+j}, \tag{16}$$

где $d > 0$, $0 < \alpha < 1$, последовательность (ε_n) является *белым шумом* (т. е. последовательностью некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией). Мы будем рассматривать последовательность (ε_n), такую что $\mathbf{P}(\varepsilon_0 = -1) = \mathbf{P}(\varepsilon_0 = 1) = 1/2$. В этом случае почти для каждого ω (относительно меры $\mathbf{P}$) последовательность

$$(Z_n^{(\alpha)}(\omega)) \tag{17}$$

является всюду плотной на континууме $A(\alpha) \cdot S_\alpha$, где $0 < \alpha \le 1/2$, $S_\alpha = K_{1/\alpha} - 1/2$ и $A(\alpha) = d \cdot \frac{2\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha}$ (см. [A11]), будем говорить, что случайный процесс $(Z_n^{(\alpha)})$ сосредоточен на континууме $A(\alpha) \cdot S_\alpha$. Стационарный случайный процесс $(Z_n^{(\alpha)})$ будем интерпретировать как *колебание континуума* $A(\alpha) \cdot S_\alpha$. В частности, процесс

$$(Z_n^{(\alpha)} + A(\alpha)/2) \tag{18}$$

является *колебанием континуума* $A(\alpha) \cdot K_{1/\alpha}$. Следующую величину

$$E = \kappa^2 \langle X_0^2 \rangle, \tag{19}$$

где κ — некоторая положительная константа, будем интерпретировать как энергию процесса (X_n), при этом $f(\lambda) = \kappa^2 g(\lambda)$ является плотностью распределения энергии процесса по частотам, поскольку $E = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$.

Энергию континуумов $A(\alpha) \cdot S_\alpha$ и $A(\alpha) \cdot K_{1/\alpha}$ определим как энергию процессов $(Z_n^{(\alpha)})$ и $(Z_n^{(\alpha)} + A(\alpha)/2)$ соответственно (см. соотношения (17), (18)).

Обозначим через f_α плотность энергии процесса $(Z_n^{(\alpha)})$ (см. соотношение (16)).

Теорема 4.3 *Пусть δ — произвольное неотрицательное действительное число и $\alpha \in (0,1)$. Тогда для любого $\lambda \in [-\pi,\pi]$ выполняется равенство*

$$\frac{1}{f_\beta(\lambda)} = \delta + \frac{1}{f_\alpha(\lambda)}, \tag{20}$$

где $\beta = \frac{2}{h+\alpha+\frac{1}{\alpha}+\sqrt{(h+\alpha+\frac{1}{\alpha})^2-4}}$, при этом $h = \delta(d\kappa)^2$.

Отметим, что в теореме 4.3 значение β определяется параметрами α и δ, соответствующую функцию будем обозначать в дальнейшем $\beta = \beta(\alpha,\delta)$. Заметим также, что имеет место неравенство $\beta \le \alpha$ ($\beta = \alpha$ в том и только в том случае, когда $\delta = 0$). Кроме того, непосредственно из (20) сразу вытекает неравенство, выполняющееся при всех $\lambda \in [-\pi,\pi]$:

$$f_\beta(\lambda) \le f_\alpha(\lambda). \tag{21}$$

Из теоремы 4.3 сразу вытекает следующее следствие.

Следствие 4.3 *Пусть α, β и δ — неотрицательные действительные числа, для которых выполняется тождество (20), e_0 — произвольное неотрицательное действительное число. Тогда для любого $\lambda \in [-\pi,\pi]$ выполняется равенство*

$$(f_\alpha(\lambda)+e_0-f_\beta(\lambda))^2 - (f_\alpha^2(\lambda)+f_\beta^2(\lambda)-2f_\alpha(\lambda)f_\beta(\lambda)(1-\delta e_0)) = e_0^2. \tag{22}$$

Предложение 4.1 *Пусть $0 < \beta \le \alpha < 1$. Функция $f_\alpha(\lambda)+e_0-f_\beta(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi,\pi]$ является плотностью энергии последовательности (B_n)*

$$B_n = \sqrt{2\pi} d\gamma \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j} + \frac{\sqrt{2\pi e_0}}{\kappa}\eta_n, \ n \ge 0, \tag{23}$$

где $(\eta_n)_{n\ge0}$ и $(\varepsilon_n)_{n\ge0}$ — некоррелируемые последовательности, являющиеся белым шумом, $\gamma = \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}}{\alpha\beta}$ и $c_j = \sum_{k=0}^{j} \alpha^{j-k+1}\beta^{k+1}$, $j \ge 0$.

Пусть выполняются условия теоремы 4.3. Найдется положительное значение e_0, такое что $\delta e_0 \le 2$, тогда $1-\delta e_0 = \cos\psi$, при некотором $\psi \in [0,\pi]$ (очевидно, что $\delta = \frac{1-\cos\psi}{e_0}$). Стало быть, соотношение (22) из следствия 4.3 для пары f_α, f_β можно переписать в виде:

$$(f_\alpha+e_0-f_\beta)^2 - \|f_\alpha \overrightarrow{l} - f_\beta \overrightarrow{m}\|^2 = e_0^2, \tag{24}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^k$ и $\overrightarrow{l}$, $\overrightarrow{m}$ — некоторые векторы единичной длины в $\mathbb{R}^k$, $k \ge 2$, такие что $\angle(\overrightarrow{l},\overrightarrow{m}) = \psi$.

Последовательность (B_n) (см. предложение 4.1), в которой $\beta = \beta(\alpha,\delta)$ (см. теорему 4.3), где $\delta = \frac{1-\cos\psi}{e_0}$, будем обозначать через $(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$, при этом, когда $\psi = 0$ (в этом случае $\alpha = \beta$), последовательность (B_n) будем обозначать через $(B_n^{(e_0)})$.

Соотношение (20) задает дробно-линейный закон преобразования плотности энергии процесса $(Z_n^{(\alpha)})$ в плотность энергии процесса $(Z_n^{(\beta)})$. При этом из предложения 4.1 следует, что можно выделить процессы $(B_n^{(e_0)})$ и $(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$ с плотностями энергий e_0 и $f_\alpha + e_0 - f_\beta$ соответственно, так что выполняется закон преобразования энергии:

$$f_\alpha + e_0 = f_\beta + (f_\alpha + e_0 - f_\beta). \tag{25}$$

Имея ввиду соотношение (25), будем говорить о взаимодействии процессов $(Z_n^{(\alpha)})$ и $(B_n^{(e_0)})$, которое приводит к процессам $(Z_n^{(\beta)})$ и $(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$ соответственно. Придавая импульсный характер второму слагаемому левой части соотношения (24), приведем геометрическую интерпретацию указанному взаимодействию. Для этого введем понятие квазичастицы (мы будем следовать работе [A11]).

Семейство процессов $\Gamma = \{(Z_n^{(\alpha)})_{n\geq 0}:\ 0 < \alpha \leq 1/2\}$ будем называть *γ-квазичастицей.* Семейство процессов $\Sigma(e_0) = \{(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})_{n\geq 0}:\ 0 < \alpha \leq 1/2,\ 0 \leq \psi \leq \pi\}$ назовем *ε-квазичастицей с параметром* e_0. Будем говорить, что каждый процесс из этих семейств является состоянием соответствующей квазичастицы.

Пусть $\mathbb{R}^{k+1}_{1,k}$ — псевдоевклидово пространство с псевдоскалярным произведением: $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = x_0y_0 - \varsigma^2\sum_{i=1}^k x_iy_i$, где ς — некоторая положительная константа. Каждый $k+1$-вектор $\overrightarrow{u} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k)$ будем представлять в виде пары $(u_0, \overrightarrow{v})$, где $\overrightarrow{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

Через $\mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(e)$ обозначим множество всех отображений, действующих из $[-\pi,\pi]$ в $\mathbb{R}^{k+1}_{1,k}$, таких что при любом $u \in \mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(e)$ выполняется равенство $\langle u(\lambda), u(\lambda)\rangle = e^2$ для всех $\lambda \in [-\pi,\pi]$.

Пусть S — сфера в $\mathbb{R}^k$. Каждому процессу из множеств Γ и $\Sigma(e_0)$ сопоставим некоторые подмножества множеств $\mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(0)$ и $\mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(e_0)$ соответственно, а именно, положим: $Q(Z_n^{(\alpha)}) = \{(f_\alpha, \frac{f_\alpha}{\varsigma}\overrightarrow{k}) : \overrightarrow{k} \in S\}$ и $Q(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)}) = \{(f_\alpha + e_0 - f_\beta, \frac{f_\alpha}{\varsigma}\overrightarrow{l} - \frac{f_\beta}{\varsigma}\overrightarrow{m}) : \overrightarrow{l}, \overrightarrow{m} \in S,\ \angle(\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}) = \psi,\ \beta = \beta(\alpha,\delta),\ \delta = \frac{1-\cos\psi}{e_0}\}$ (значение $\beta = \beta(\alpha,\delta)$ определяется в теореме 4.3). Заметим, что $Q(B_n^{(e_0)}) = \{(e_0, \overrightarrow{0})\}$. Отметим, что справедливость включения $Q(Z_n^{(\alpha)}) \subseteq \mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(0)$ является очевидной, справедливость же второго включения $Q(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)}) \subseteq \mathcal{R}^{k+1}_{1,k}(e_0)$ сразу вытекает из соотношения (24).

Первая компонента $k+1$-векторов, соответствующих $Q(Z_n^{(\alpha)})$ и $Q(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$ является плотностью распределения энергии процесса, представляющего состояние соответствующей квазичастицы. Второй компоненте придадим смысл плотности импульса квазичастицы. Если у квазичастицы вторая (импульсная) компонента равна $\overrightarrow{0}$, будем называть ее покоящейся, заметим, что покоящейся может быть только ε-квазичастица.

Возвращаясь к соотношениям (24) и (25), имеем

$$(f_\alpha, \frac{f_\alpha}{\varsigma}\overrightarrow{l}) + (e_0, \overrightarrow{0}) = (f_\beta, \frac{f_\beta}{\varsigma}\overrightarrow{m}) + (f_\alpha + e_0 - f_\beta, \frac{f_\alpha}{\varsigma}\overrightarrow{l} - \frac{f_\beta}{\varsigma}\overrightarrow{m}). \tag{26}$$

Обозначим $C_{q,a,A}(x) = AC_q(x/a)$, $x \in \mathbb{R}$ и $D_{q,b,B}(x) = BD_q(x/b)$, $x \in \mathbb{R}$, где a, A и b, B — положительные константы. Определим метрики $\rho_{q,a,A}(x,y) = |C_{q,a,A}(x) - C_{q,a,A}(y)|$ и $\varrho_{q,b,B}(x,y) = |D_{q,b,B}(x) - D_{q,b,B}(y)|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $A = (A_1, \ldots, A_k)$ и $b = (b_1, \ldots, b_k)$, $B = (B_1, \ldots, B_k)$ — наборы, содержащие положительные константы. Определим метрики: $\rho_{k,q,a,A}(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \rho^2_{q,a_j,A_j}(x_j,y_j)}$, $\varrho_{k,q,b,B}(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varrho^2_{q,b_j,B_j}(x_j,y_j)}$, где $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

Если заменить в следствиях 4.1 и 4.2 метрики $\rho_{k,q}$ и $\varrho_{k,q}$ на $\rho_{k,q,a,A}$ и $\varrho_{k,q,b,B}$ соответственно, то в итоге получим

$$\langle \varrho^2_{k,q,b,B}(\mathbf{S}_n, 0)\rangle \asymp n^{1/d_q} \tag{27}$$

и

$$\langle \rho^2_{k,q,a,A}(\mathbf{S}_n, 0)\rangle \asymp n^{d_q}, \tag{28}$$

где $d_q = \ln 2/\ln q$.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_k)$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^k$, в дальнейшем нам понадобятся обозначения:

$$C_{q,a,A}(x) = (A_1 C_q(x_1/a_1), \ldots, A_k C_q(x_k/a_k))$$

и

$$D_{q,b,B}(x) = (B_1 D_q(x_1/b_1), \ldots, B_k D_q(x_k/b_k)).$$

Пусть $b = (b_1, \ldots, b_k)$ и $B = (B_1, \ldots, B_k)$ — наборы, состоящие из произвольных положительных констант. Рассмотрим блуждание $(\mathbf{M}_n)_{n\geq 0}$, где

$$\mathbf{M}_n = D_{q,b,B}(\mathbf{S}_n).$$

В соответствии с (27) выполняется соотношение

$$\langle \|\mathbf{M}_n\|^2\rangle \asymp n^{1/d_q}. \tag{29}$$

Заметим, что в каждый момент времени n почти для каждого ω значение

$$\mathbf{M}_n(\omega) \in B_1 K^e \times \cdots \times B_k K^e, \tag{30}$$

где $B_1, \ldots, B_k$ — масштабные константы (множество K^e определено в (11)).

Отметим, что

$$\mathbf{M}_n = (\varrho_{q,b_1,B_1}(S_n^{(1)}, 0)\,\mathrm{sign}(S_n^{(1)}), \ldots, \varrho_{q,b_k,B_k}(S_n^{(k)}, 0)\,\mathrm{sign}(S_n^{(k)})).$$

Итак, стандартный процесс блуждания $(\mathbf{S}_n)$ деформируется в процесс $(\mathbf{M}_n)$ относительно метрики $\varrho_{k,q,b,B}$.

В силу того, что все компоненты исследуемых многомерных случайных блужданий и стационарных процессов независимы и ведут себя по времени одинаковым образом, в дальнейшем мы будем рассматривать одномерные компоненты соответствующих процессов.

Найдем энергетические характеристики деформации классического процесса блуждания в процесс аномальной диффузии.

Предложение 4.2 *При всех* $n = 0, 1, \ldots$ *выполняется равенство*

$$\varrho_{q,b,B}(Z_n^{(1/2)} + b/2,\ 0) = Z_n^{(\beta)} + B/2 \quad \text{п. н.},$$

где $\beta = 1/q$, $b = 4d\sqrt{\pi}$ *и* $B = \frac{2d\sqrt{2\pi\beta}}{1-\beta}$.

Мы имеем, что j-ая компонента $(S_n^{(j)})$ блуждания $(\mathbf{S}_n)$ деформируется в j-ую компоненту $(M_n^{(j)})$ блуждания $(\mathbf{M}_n)$ относительно метрики ϱ_{q,b_j,B_j}, где $1 \le j \le k$. В свою очередь процесс $Z_n^{(1/2)} + b/2$ деформируется в процесс $Z_n^{(\beta)} + B/2$ относительно метрики $\varrho_{q,b,B}$, где $\beta = 1/q$ и значения констант b, B определены в предложении 4.2. Установим соответствие между метриками ϱ_{q,b_j,B_j} и $\varrho_{q,b,B}$. Полагая $b_j = b$, получаем, что $d = \frac{b_j}{4\sqrt{\pi}}$, в частности, вычисленное значение d позволяет найти постоянную B, а именно: $B = \frac{2b_j\sqrt{\pi\beta}}{2\sqrt{\pi}(1-\beta)}$. Поскольку набор $(B_1, \ldots, B_k)$ — произвольный набор констант, поэтому положим $B_j = B$. В итоге мы получим, что процесс $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$ деформируется в процесс $(Z_n^{(\beta)} + B_j/2)$ относительно метрики ϱ_{q,b_j,B_j}.

Заметим, что процесс $Z_n^{(\beta)} + B_j/2$ сосредоточен на множестве $B_j K_q$, являющимся подмножеством множества $B_j K^e$, при этом на множестве $B_j K^e$ «находится» j-ая компонента $\mathbf{M}_n$ (см. соотношение (30)).

Деформации процесса $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$ в процесс $(Z_n^{(\beta)} + B_j/2)$ соответствует закон динамики (26) для квазичастиц, где $\alpha = 1/2$ и $\beta = 1/q$.

Из неравенства (21) следует, что энергия процесса $(Z_n^{(\beta)})$ меньше энергии процесса $(Z_n^{(\alpha)})$, т. е. энергия континуума, при таком преобразовании уменьшается, при этом энергия процесса $(B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})$ больше по сравнению с энергией процесса $(B_n^{(e_0)})$.

Процессу $(S_n^{(j)})$ сопоставим стационарный процесс $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$. В итоге мы получаем следующее преобразование для двойки процессов $((S_n^{(j)}), (Z_n^{(1/2)} + b_j/2))$ относительно метрики ϱ_{q,b_j,B_j}:

$$\begin{aligned} &((S_n^{(j)}), (Z_n^{(1/2)} + b_j/2)) \text{ деформируется в} \\ &((M_n^{(j)}), (Z_n^{(\beta)} + B_j/2)),\ j = 1, 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{31}$$

при этом «внешним фактором», вызывающим деформацию процесса $(Z_n^{(1/2)} + b_j/2)$, является процесс $(B_n^{(e_0)})$ (поскольку деформации стационарных процессов мы придали характер взаимодействия, используя ε- и γ-квазичастицы).

Ранее уже отмечалось (см. введение), что деформация процесса $(\mathbf{S}_n)$ классической диффузии моделирует взаимодействие *диффундирующих частиц* (т. е. диффундирующей среды) и *внешней среды* и приводит к закону перемещения диффундирующей частицы: $(\mathbf{M}_n)$. Сформулируем *гипотезу о подобии* динамических моделей описания деформации диффузии и стационарных процессов.

Гипотеза о подобии: динамическое описание деформации классической диффузии определяется динамическим описанием той же деформации, примененной к стационарным процессам, сосредоточенным на компактах положительной лебеговой меры того же континуума, на котором рассматривается процесс классической диффузии.

Выполнение этой гипотезы предполагает реализацию следующих условий:
(H_1) состояния γ-квазичастиц (т. е. процессы типа (18)) определяют энергетические состояния диффундирующей среды;
(H_2) состояния ε-квазичастиц (т. е. процессы типа (23)) определяют энергетические состояния внешней среды;
(H_3) перенос энергии и импульса в системе внешняя среда-диффундирующая среда определяется переносом энергии и импульса между квазичастицами.

Подводя итог, получаем, что в результате взаимодействия квазичастиц энергия континуума (как энергия одного из состояний γ-квазичастицы), соответствующего диффундирующим частицам, уменьшается, при этом энергия процесса, соответствующего внешней среде увеличивается. Напомним, что в этом случае имеет место соотношение:

$$\begin{aligned}&((Z_n^{(1/2)} + b_j/2), (B_n^{(e_0)}))\ \text{преобразуется в}\\ &((Z_n^{(\beta)} + B_j/2), (B_n^{(\alpha,\psi,e_0)})).\end{aligned} \tag{32}$$

Преобразование (32), в рамках условий (H_1)—(H_3), интерпретируется следующим образом: диффундирующая среда передает энергию и импульс внешней среде. При этом закон перемещения частицы принимает вид: $\mathbf{M}_n$ (см. первые компоненты двоек в (31)), что соответствует супердиффузионному режиму переноса (см. соотношение (29)).

Построенная в четвертой главе информационная модель аномальной диффузии основана на следующих предположениях: 1) аномальность является следствием деформации процесса классической диффузии с помощью преобразований евклидовой топологии, 2) энергетические характеристики деформации процесса классической диффузии в процесс аномальной диффузии определяются деформацией стационарных процессов сдвига, сосредоточенных на непрерывном и сингулярном континууме.

Прогноз динамики деформации процесса классической диффузии осуществляется за счет введения квазичастиц. Назначение квазичастиц состоит в том, чтобы представить ту часть процесса аномальной диффузии, которая отражает процессы обмена энергией и импульсом блуждающих частиц с внешней средой. Процесс обмена энергией и импульсом регулируется динамическими соотношениями для квазичастиц, а элементарный акт обмена сводится к эффекту «типа Комптона», который в безразмерной математической модели допускает прямую реализацию в случае супердиффузии и обратную в случае субдиффузии.

В **главе 5** построена модель случайного блуждания, в которой соотношение пространственно-временных нелокальностей определяется структурой потока памяти и стохастической моделью сил. На основе предлагаемой модели разработан алгоритм, позволяющий вычислять параметры, характеризующие нелокальность воздействия среды и памяти частицы.

Рассмотрим модель случайного изменения положения частицы с массой m в пространстве. Пусть частица в начальный момент времени находится в начале координат и, далее, фиксируется в моменты времени, кратные шагу измерения времени τ. Будем исследовать аномальность блуждания вдоль некоторого направления. Пусть проекция на выделенное направление блуждания реализуется следующей случайной последовательностью: $R_n,\ n \geq 1$, $R_0 = 0$.

В дальнейшем, мы будем рассматривать одномерное случайное блуждание (R_n). Вычислим разностную скорость блуждающей частицы в момент $k\tau,\ k \geq 1$: $v(k\tau) = (R_k - R_{k-1})/\tau$, где $v(0) = 0$ и ее приращение $\Delta v(k\tau) = v(k\tau) - v((k-1)\tau),\ k \geq 1$.

Изменение импульса частицы в момент $k\tau$ отражает влияние среды в данный и предыдущие моменты времени, и, в соответствии с моделью системы с памятью (см. [9]) представляется результатом действия некоторого потока

$$m\Delta v(k\tau) = \tau \sum_{i=1}^{k} p(k-i) f(i\tau), \tag{33}$$

в этом представлении $\big(f(i\tau)\big)_{i\geq 0}$ — случайная последовательность, имеющая размерность силы и $\big(p(i)\big)_{i\geq 1}$ — некоторая безразмерная последовательность неотрицательных чисел, где, будем считать, $p(0) = 1$. Для каждого $i \geq 0$ значение $p(i)$ представим в виде $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$, где M — некоторая неубывающая на неотрицательной полуоси функция, при этом для удобства будем считать, что $M(0) = 0$, соответственно при этом $M(1) = 1$. Соотношение (33) принимает вид

$$m\Delta v(k\tau)/\tau = \sum_{i=0}^{k-1} f((k-i)\tau)\Delta M(i). \tag{34}$$

Случайные величины $f(i\tau)$ в (34) представим в виде

$$f(i\tau) = m(X_i - X_{i-1})/\tau^2,\ i \geq 1, \tag{35}$$

где (X_i) — случайная последовательность, имеющая размерность длины (будем считать, что $X_0 = 0$). Заметим, что в случае отсутствия «памяти», когда имеют место равенства: $p(0) = 1$ и $p(i) = 0$ при всех $i \geq 1$, представление (33) дает классический закон изменения импульса под действием силы $f(k\tau)$, где последовательность (X_i) приобретает смысл перемещений частицы. В случае системы с памятью $X_i,\ i \geq 0$ не обязаны представлять перемещения в евклидовом пространстве.

Из (34) и (35) находим следующее представление скорости в рассматриваемой модели с памятью

$$v(k\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{k} X_{k-i} \Delta M(i).$$

Следовательно, R_n представляется в виде:

$$R_n = \tau \sum_{k=0}^{n} v(k\tau) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} X_{k-i} \Delta M(i),\ n = 0, 1, \ldots. \tag{36}$$

Последовательность положений R_n частицы, построенную по функции M, будем обозначать через $R_n(M)$. Наша цель — исследовать последовательность $(R_n(M))_{n\geq 0}$ как модель блуждания с памятью, управляемой функцией M и случайной последовательностью (X_i). В качестве функции M будет использоваться либо степенная функция $p_\nu(t) = t^\nu,\ \nu \geq 0$ (считаем, что $p_0(0) = 0$), либо продолженная на всю положительную полуось лестница Кантора $C_q(t),\ q > 2$.

Вернемся к вопросу структурирования последовательности (X_n). Согласно (35), отсутствие условия независимости случайных величин $(X_n)_{n\geq 1}$ означает, вообще говоря, что в данный момент времени $i\tau$ результирующая среды $f(i\tau)$ имеет ненулевые корреляции с соответствующими значениями этой результирующей в любые другие моменты времени и, стало быть, представление (36) реализует «перемешивание» памяти частицы и нелокальности воздействия среды.

Мы в дальнейшем ограничимся случаем стационарной последовательности $(X_n)_{n\geq 1}$ с нулевыми средними. В широких предположениях условие стационарности последовательности $(X_n)_{n\geq 1}$ эквивалентно тому, что X_n имеет следующее разложение (см. [4])

$$X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} a_k, \tag{37}$$

где $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичной дисперсией и $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ — неслучайная суммируемая с квадратом последовательность действительных чисел.

Мы сузим класс рассматриваемых стационарных последовательностей, наложив следующее условие (H) на последовательности (ξ_k) и (a_k), в представлении (37):

(H): *Последовательность (ξ_k) — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. Последовательность (a_k) имеет вид*:

$$\begin{aligned} &a_k = \sigma L_H^{-1/2}((k+1)^{H-1/2} - k^{H-1/2}),\ k \geq 1, \\ &a_0 = \sigma L_H^{-1/2} \ \text{и}\ a_k = 0,\ k < 0, \end{aligned} \tag{38}$$

где H — некоторый параметр, такой что $0 < H < 1$, $L_H = \frac{1}{2H} + \int_0^\infty ((1+s)^{H-1/2} - s^{H-1/2})^2\, ds$ и σ — ненулевая константа.

В случае $H = 1/2$, получаем, что $a_0 = \sigma$ и $a_k = 0$ при всех $k \neq 0$, в этом случае $X_n = \sigma\xi_n,\ n \geq 1$ — обычная последовательность независимых одинаково распределенных величин.

Выбор последовательности (a_k) мотивирован тем, что

$$\langle (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 \rangle \sim \sigma^2 n^{2H},\ n \to +\infty. \tag{39}$$

Это означает, что с помощью такой последовательности мы можем моделировать весь содержательный спектр степенного изменения второго момента суммы $\sum_{i=1}^n X_i$.

Напомним, что согласно (34) последовательность $\Delta M(i) = M(i+1) - M(i)$, $i \geq 0$ управляет памятью частицы.

Пусть $M = p_\nu$ — степенная функция с показателем ν. Начнем со случая $\nu = 0$. Значение $\Delta p_\nu(0) = 1$ и $\Delta p_\nu(i) = 0$ при всех $i \geq 1$, поэтому имеет место полная потеря памяти о предыстории частицы. В этом случае $R_n(p_0) = \sum_{i=1}^n X_i$ и $\langle R_n^2(p_0)\rangle \sim \sigma^2 n^{2H}$ при $n \to \infty$ (см. выше соотношение (39)). Стало быть, аномальность блуждания $R_n(p_0)$ определяется нелокальностью воздействия среды на частицу.

В случае $\nu = 1$ значение $\Delta p_\nu(i) = 1$ для любого $i \geq 0$, т. е. можно говорить о полном сохранении информации о предыстории частицы.

Рассмотрим теперь случай $0 < \nu < 1$. Выполняется соотношение $\Delta p_\nu(i) \sim \frac{\nu}{i^{1-\nu}} \to 0$ при $i \to +\infty$, чему можно придать смысл «старения информации» о предыстории. В дальнейшем для степенной функции p_ν мы будем *рассматривать именно случай* $0 \leq \nu \leq 1$, что соответствует представлению о «монотонном» уменьшении (возможно в не строгом смысле) информации о предыстории.

Помимо представленного случая монотонного изменения информации, мы будем рассматривать ситуацию, когда колебание $\Delta M(i)$ убывает импульсным образом,
т. е. $\Delta M(i)$ отлично от 0 для определенных моментов i, при этом с ростом i колебание $\Delta M(i)$ все реже принимает значения отличные от 0. В качестве такой функции $M = C_q$ мы будем рассматривать продолжение лестницы Кантора на всю положительную полуось с сохранением свойства масштабной инвариантности.

Результатом следующей теоремы является «расщепление» показателя степенного изменения по времени второго момента исследуемого случайного блуждания.

Теорема 5.1 *Пусть выполняется условие* (H) *и* $0 \leq \nu \leq 1$, $2 < q < \infty$. *Тогда при* $n \to +\infty$ *выполняются следующие асимптотические соотношения:*

$$\langle R_n^2(p_\nu)\rangle \sim \sigma^2 s_{\nu,H}^2 n^{2\nu+2H} \tag{40}$$

и

$$\langle R_{q^n}^2(C_q)\rangle \sim \sigma^2 c_{q,H}^2 q^{n(2d_q+2H)},$$

где $s_{\nu,H}^2 = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H})dp_\nu(u)dp_\nu(v)$,
$c_{q,H}^2 = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H})dC_q(u)dC_q(v)$. *Кроме того,* $\langle R_n^2(C_q)\rangle \asymp n^{2d_q+2H}$.

Отметим, что в теореме 5.1 параметр H отвечает за нелокальность воздействия среды, а параметр ν и d_q отвечают за память частицы.

Через $B_H(t)$ обозначим так называемое дробное броуновское движение (см. [14]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t,s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ 0 < H < 1. \tag{41}$$

Определим гауссовский процесс:

$$Z_t(M, H) = \sigma \int_0^t B_H(t-s)dM(s). \tag{42}$$

Процесс $Z_t(M, H)$ в тех случаях, когда M степенная функция или же лестница Кантора C_q, $q < +\infty$, обладает свойством статистической масштабной инвариантности.

Теорема 5.2 *Пусть выполняется условие* (H) *и* $0 \le \nu \le 1$, $2 < q < \infty$ *и, кроме того,* $\langle |\xi_1|^\alpha \rangle < \infty$ *для некоторого* α*, такого что* $\alpha \ge 2$ *и* $\alpha H > 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется сходимость по распределению*:

$$\max_{1 \le k \le n} \frac{|R_k(p_\nu)|}{n^{H+\nu}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(p_\nu, H)|, \tag{43}$$

и

$$\sup_{t \in [0,1]} \frac{|R_{[q^n t]}(C_q)|}{q^{n(H+d_q)}} \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0,1]} |Z_t(C_q, H)|,$$

где $d_q = \ln 2 / \ln q$.

На основе этих предельных теорем реализуется алгоритм вычисления параметров нелокальности по времени и пространству.

В пятой главе рамках феноменологии потока памяти (см. [8], [9]) построена модель случайного блуждания, для которой в условии конечности момента второго порядка возможен как суб- так и супердиффузионный режим, при этом вообще говоря различается случай формирования памяти по правильно меняющейся функции и лестнице Кантора.

Показатель степенного изменения дисперсии построенного процесса блуждания складывается из удвоенного параметра нелокальности воздействия среды и удвоенного параметра памяти частицы. Заметим, что в случае формирования памяти по лестнице Кантора установлена бинарная структура информации о предыстории частицы. Отметим также, что рассмотрен переходный случай от диффузионного режима блуждания к аномальному, когда дисперсия блуждания ведет себя как произведение линейной на медленно меняющуюся функцию.

Если для некоторого блуждания установлено, что показатель степенного изменения дисперсии находится в диапазоне $(0, 4)$, то, применяя разработанный алгоритм к соответствующим выборочным данным, можно вычислить параметры нелокальности и оценить близость к модели блуждания со степенной памятью (заметим, что за рамками настоящей работы осталось вычисление параметров нелокальности для модели блуждания с канторовой памятью). Далее, вычисленные параметры нелокальности можно использовать для прямого стохастического моделирования процесса блуждания с соответствующими параметрами нелокальности и законом изменения дисперсии.

В **главе 6** реализуется алгоритм оценки адекватности модели нестационарного шума, полученной в пятой главе. Оценка адекватности выполняется на выборке значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, измеренной в периферийной области удержания плазмы термоядерной установки Токамак Т-10 (*выборка предоставлена профессором В. П. Будаевым. Российский научный центр "Курчатовский институт". E-mail*: *budaev@mail.ru*), при этом мера адекватности модели определяется реально достигнутым уровнем значимости полученного в данной главе статистического критерия. Кроме того, в шестой главе реализуется имитационный алгоритм моделирования плотности плазмы термоядерной установки.

Пусть $(X_i;\ i = 1, 2, \dots)$ — последовательность стационарных (в широком смысле) случайных величин с конечным вторым моментом. В дальнейшем всюду будем предполагать степенной характер закона изменения дисперсии суммы $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ с показателем $H \in (0, 1)$, а именно:

$$\langle S_n^2 \rangle - \langle S_n \rangle^2 \sim \sigma^2 n^{2H},\ n \to \infty, \tag{44}$$

где параметр H в (44) называется параметром Хёрста, ненулевой параметр σ будем называть коэффициентом степенного изменения. Такую последовательность (X_i) будем называть *стационарным шумом*. Используя последовательность $(X_i;\ i = 1, 2, \dots)$, определим *нестационарный шум* следующим образом

$$\rho_k = \sum_{i=0}^{k-1} X_{k-i} \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{45}$$

где $\Delta p_\nu(i) = p_\nu(i+1) - p_\nu(i)$, $p_\nu(t) = t^\nu$, $0 \le \nu \le 1$ (считаем, что $p_0(0) = 0$). В случае $\nu = 0$ последовательность (ρ_k) совпадает с (X_k). Параметр ν будем интерпретировать как индекс нестационарности процесса (в случае $\nu = 0$ последовательность (ρ_k) становится стационарной).

Обозначим $a = \langle X_1 \rangle$. Заметим, что выполняется равенство

$$\rho_k = a k^\nu + \sum_{i=0}^{k-1} (X_{k-i} - a) \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{46}$$

Стало быть, последовательность (ρ_k) обладает степенным трендом.

Итак, будем рассматривать экспериментально полученную выборку временного ряда значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы (единица измерения времени 1 мкс): $\rho = (\rho_k;\ k = 1, \dots, n)$. Сигнал плотности нормирован на величину средней плотности плазмы на краю центральной зоны в Токамаке Т-10, которая составляет величину $1 \cdot 10^{13}$ частиц/см^3 (это типичное значение в токамаках) (см. [1]). Исследованный сигнал измерен в зоне, где наблюдается явление перемежаемости с признаками дальних корреляций.

Проверим адекватность модели нестационарного шума (45) на соответствие этим выборочным данным. Для этого мы реализуем следующую схему.

Схема оценки адекватности модели:

1. Для каждого $\nu \in [0, 1]$ решаем систему (45) (в данной работе значение ν выбирается из множества $\{k/10^3 : k = 0, \dots, 5 \cdot 10^2\}$). В итоге получаем последовательность $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ (зависящую от ν).

2. С помощью последовательности $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ находим оценки параметров степенного изменения дисперсии $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, а именно: оценку

$H^*(\nu)$ параметра Хёрста и оценку $\sigma^*(\nu)$ коэффициента степенного изменения.

3. На выборке $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ определяем меру соответствия $M_e(\nu)$ (где e — наперед заданный уровень значимости) основной гипотезе о степенном поведении дисперсии S_n и стационарности этой последовательности.

4. Выбираем ν^*, для которого $M_e(\nu)$ принимает максимальное значение.

5. Получаем пару значений (ν^*, H^*) и значение меры соответствия $M_e(\nu^*)$, при котором можно говорить об адекватности модели (45) по ее соответствию выборочным данным.

Далее, используя выборку (X_k), соответствующую оценке ν^*, реализуем схему стохастического моделирования временного ряда (ρ_k).

В следующем методе 2 мы приведем критерий проверки того, что выборка $(X_j^{(\tau)},\ j = 1, \ldots, [n/\tau])$, где $X_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau}(X_i - a^*)$ и $1 \leq \tau < n$ (напомним, что $a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$) является фрактальным шумом. Отметим, что масштабный параметр τ необходимо выбирать так, чтобы $\tau >> 1$ и $n/\tau >> 1$. Условие $n/\tau >> 1$ обеспечивает корректное применение критерия Пирсона для проверки нормальности (см. ниже пункт 6). Условие $\tau >> 1$ должно обеспечить близость распределения случайной величины $\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \tau a$ к нормальному закону, а также близость $\langle(\sum_{i=1}^{\tau} X_i - \tau a)^2\rangle$ к $\sigma^2\tau^{2H}$ (см. соотношение (44)).

Метод 2:

1. Методом дисперсий (см. метод 1) находим оценки σ^* и H^* параметров σ и H соответственно.

2. Центрируем с помощью a^* выборку $(X_k;\ k = 1, \ldots, n)$. Получаем $X_k^* = X_k - a^*,\ k = 1, \ldots, n$.

3. Формируем выборку: $X_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} X_i^*,\ j = 1, \ldots, [n/\tau]$.

4. Определяем ковариационную матрицу фрактального шума R, где $\delta = \sigma^*\tau^{H^*}$ (учитываем степенное поведение дисперсии блока длины τ).

5. Используя матрицу R, находим матрицы B и C. Умножив $B^{-1}C^T$ на вектор $(X_j^{(\tau)};\ j = 1, \ldots, [n/\tau])^T$ получаем выборку $(\eta_i;\ i = 1, \ldots, [n/\tau])$.

6. На реализации выборки $(\eta_i;\ i = 1, \ldots, [n/\tau])$ найдем реально достигнутый уровень значимости критерия Пирсона при основной гипотезе о стандартной нормальности выборки.

6.1. Обозначим $m = [n/\tau]$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа). Разобьем числовую ось на $k = [\log_2 m] + 1$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ так, чтобы $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) = m\Phi_{0,1}(\Delta_2) = ... = m\Phi_{0,1}(\Delta_k) = m/k$, где $\Phi_{0,1}$ — функция распределения стандартного нормального закона. Определяем на выборке $(\eta_i;\ i = 1, \ldots, [n/\tau])$ значение статистики Пирсона $\Pi = \sum_{i=1}^{k}(\frac{\nu_i - m/k}{m/k})^2$, где ν_i — число попаданий элементов выборки (η_i) в Δ_i, $i = 1, \ldots, k$.

6.2. Имея в виду три оцениваемых параметра a, σ и H, находим реально достигнутый уровень значимости критерия Пирсона, а именно: $\varepsilon(\tau) = 1-\chi^2_{k-4}(\Pi)$, где $\chi^2_{k-4}(\cdot)$ — известное распределение χ^2 с $k-4$ степенями свободы.

При гипотезе о стационарности выборки $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ и степенном поведении дисперсии (см. соотношение (44)) (в дальнейшем эту гипотезу будем называть основной) приведем метод вычисления меры соответствия этой гипотезе. Выберем целочисленный интервал $T = \{\tau \in \mathbb{Z}_+ : \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2\}$, такой что $\tau_1 >> 1$ и $n/\tau_2 >> 1$.

Если для значительного числа точек τ интервала T (далее, мы формализуем, что это значит) удастся установить на некотором уровне значимости e, что выборка $(X_j^{(\tau)},\ j = 1,\ldots,[n/\tau])$ является фрактальным шумом, то это и будет подтверждать основную гипотезу для выборки $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$.

Пусть X — произвольное подмножество множества $\mathbb{Z}_+$, через $l(X)$ будем обозначать число целых точек множества X. Для каждого значения τ из интервала T найдем реально достигнутый уровень значимости: $\varepsilon(\tau)$ (см. пункт 6.2). Заранее выберем некоторый уровень значимости e. Из интервала T выделим подмножество $S = \{\tau \in T : \varepsilon(\tau) > e\}$. Определим отношение $M_e = l(S)/l(T)$. В дальнейшем значение M_e будем называть мерой соответствия основной гипотезе (о стационарности выборки $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$ и степенном поведении дисперсии). Отметим, что при уровне значимости e принимается $M_e \cdot 100\%$ (от общего числа $l(T)$) гипотез о том, что последовательность $(X_j^{(\tau)},\ j = 1,\ldots,[n/\tau])$ для каждого $\tau \in S$ является фрактальным шумом. Следовательно, достаточно большое значение M_e (скажем, более 0.05) свидетельствует в пользу принятия основной гипотезы для исследуемого ряда наблюдений $(X_k)_{k=1,\ldots,n}$.

В шестой главе исследуется выборка объемом $n = 500001$, при этом τ выбирается из промежутка $T = [100, 1000]$. В этом случае $m = [n/\tau] \geq 500$ и $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) \geq 51$ (см. пункт 6.1). Значение e будем выбирать равным 0.05. Отметим, во-первых, что увеличение τ_2 (правой границы интервала T) может привести к значительной погрешности при вычислении $\varepsilon(\tau_2)$, возникающей при замене распределения статистики Пирсона на распределение χ^2, и, во-вторых, уменьшение τ_1 (левой границы интервала T) может привести к значительному отклонению распределения $\sum_{i=1}^{\tau_1} X_i - \tau_1 a$ от нормального закона, а также отклонению $\langle(\sum_{i=1}^{\tau_1} X_i - \tau_1 a)^2\rangle$ от $\sigma^2\tau_1^{2H}$.

Построим блуждание $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \rho_k,\ n \geq 0$, где ρ_k определено в (45). При дополнительных ограничениях на (X_i) (достаточно дополнительно к (44) потребовать существование спектральной плотности для этой последовательности см. [A16]) выполняется соотношение

$$\langle Z_n^2\rangle - \langle Z_n\rangle^2 \sim \sigma^2 s^2_{\nu,H} n^{\alpha},\ n \to \infty, \tag{47}$$

где $\alpha = 2\nu+2H$, $s^2_{\nu,H} = \frac{\nu^2}{2}\int_0^1\int_0^1((1-u)^{2H}+(1-v)^{2H}-|u-v|^{2H})u^{\nu-1}v^{\nu-1}\,dudv$, константа σ определена в соотношении (44). Заметим, что справедливость приведенной эквивалентности следует из того, что $Z_n - \langle Z_n\rangle$ аппроксимируется в определенном смысле гауссовским процессом $\sigma\int_0^n B_H(n-s)s^{\nu-1}\,ds$, где B_H – фрактальное броуновское движение.

Получено, что $\nu^* = 0.057$ и $H^* = 0.727$, следовательно, оценка α^* показателя α для выборки значений плотности плазмы равна 1.569, что означает супердиффузионный режим переноса.

В шестой главе представлена модель нестационарного шума и проверена адекватность этой модели на ее соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки. Получены достаточно высокие реально достигнутые уровни значимости, по совокупности которых можно говорить об адекватности предложенной модели. Приведен метод моделирования временного ряда значений плотности плазмы, основанный на известном методе обратной функции моделирования негауссовских процессов. Отметим также, что получен степенной закон изменения по времени дисперсии процесса частичных сумм временного ряда значений плотности плазмы с показателем $\alpha^* = 1.569$, при этом параметры нелокальности по времени и пространству равны 0.057 и 0.727 соответственно.

В **заключении** приведены основные результаты работы, составляющие научную новизну, теоретическую и практическую значимость.

Автор выражает глубокую признательность своим учителям З. П. Полищук, И. С. Борисову и В. А. Селезневу.

Автор благодарен А. В. Кельманову за плодотворное обсуждение тематики диссертации.

Список литературы

[1] Будаев В. П., Савин С. П., Зеленый Л. М. Наблюдения перемежаемости и обобщенного самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной и магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // УФН. — 2011.— Т. 189, №9.— С. 905-952.

[2] Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. — М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

[3] Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. — 2004. — Т. 174, №8. — С. 819–852.

[4] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.

[5] Королев В. Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. — М.: ИПИ РАН, 2007.

[6] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000.

[7] Монин А. С., Яглом А. М. О законах мелкомасштабных турбулентных движений жидкостей и газов // УМН. — 1963. — Т. 18, №5. — С. 93–114.

[8] Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. — 1992.— Т. 90, №3. — С. 354–368.

[9] Олемской А. И., Флат А. Я., Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. — 1993.— Т. 163, №12.— С. 1–50.

[10] Пьетронеро Л., Тозатти Э. Фракталы в физике.— М.: Мир, 1988.

[11] Edgar G. Measure, Topology, and Fractal Geometry. — New York: Springer, 2008.

[12] Gefen Y., Aharony A., Alexander S. Anomalous Diffusion on Percolating Clusters // Phys. Rev. Lett. — 1983. — V. 50, №1. — P. 77–80.

[13] Mandelbrot B. The variation of certain speculative prices // J. Business. — 1963. — Vol. 36, P. 394–419.

[14] Mandelbrot B., Van Ness J. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications // SIAM Review. — 1968. — Vol. 10, №4,— P. 422–437.

[15] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. — 2000. — Vol. 339, iss. 1. – P. 1–77.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

[A1] Аркашов Н.С., Ковалевский А.П. Вероятностная модель цен на квартиры // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2012. — Т. 15, №2 (50). — С. 11–20. RSCI (ядро РИНЦ).

[A2] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об условиях формирования процессов суб- и супердиффузии на самоподобных множествах // Доклады Академии наук высшей школы РФ. — 2014. — Т. 25, №4. — С. 33–38.
DOI 10.17212/1727-2769-2014-4-33-38

[A3] Аркашов Н. С., Лежнев Е. В. О модели случайного блуждания на ковре Серпинского // Научный вестник НГТУ. — 2015. — Т. 60, №3. — С. 83–93. DOI 10.17212/1814-1196-2015-3-83-93

[A4] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О моделировании аномальной диффузии методом мастер-уравнения // Доклады Академии наук высшей школы РФ. — 2016. — Т. 31, №2. — С. 7–15.
DOI 10.17212/1727-2769-2016-2-7-15

[A5] Аркашов Н. С. О гауссовской аппроксимации процессов с памятью специального вида // Научный вестник НГТУ. — 2016. — Т. 63, №2. — С. 49–60.
DOI 10.17212/1814-1196-2016-2-49-60

Статьи в изданиях, индексируемых в базах цитирования Scopus и Web of Science

[A6] Аркашов Н. С., Борисов И. С., Могульский А. А. Принцип больших уклонений для процессов частных сумм скользящих средних // Теория вероятн. и ее примен. — 2007. — Т. 52, №2. — С. 181–208. RSCI (ядро РИНЦ).
DOI 10.4213/tvp171
Arkashov N. S., Borisov I. S., Mogulskii A. A. Large Deviation Principle for Partial Sum Processes of Moving Averages // Theory of Probability and its Applications. — 2008. — V. 52, №2. — P. 181–208. WoS, SCOPUS.
DOI 10.1137/S0040585X97982955

[A7] Аркашов Н. С. Новое достаточное условие в принципе инвариантности для процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, №6. — С. 949–961. RSCI (ядро РИНЦ).
Arkashov N. S. A new sufficient condition in the invariance principle for the partial sum processes of moving averages // Siberian Mathematical Journal. — 2010. — V. 51, №6. — P. 949–961. WoS, SCOPUS.
DOI 10.1007/S11202-010-0094-4

[A8] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О модели случайного блуждания на множествах с самоподобной структурой // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, №6. — С. 1216–1236. RSCI (ядро РИНЦ).
Arkashov N. S., Seleznev V. A. On a random walk model on sets with self-similar structure // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — V. 54, №6. — P. 968–983. WoS, SCOPUS.
DOI 10.1134/S0037446613060025

[A9] Аркашов Н. С. Эргодические свойства одного преобразования на пространстве с мерой Хаусдорфа и самоподобной структурой // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, №2. — С. 163–173. RSCI (ядро РИНЦ).
DOI 10.4213/mzm9689
Arkashov N. S. Ergodic properties of a transformation of a self-similar space with a Hausdorff measure // Mathematical Notes. — 2015. — V. 97, №2. — P. 155–163. WoS, SCOPUS.
DOI 10.1134/S0001434615010186

[A10] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О модели суб- и супердиффузии на топологических пространствах с самоподобной структурой // Теория вероятн. и ее примен. — 2015. — Т. 60, №2. — С. 209–226. RSCI (ядро РИНЦ).
DOI 10.4213/tvp4616
Arkashov N. S., Seleznev V. A. On a Model of Sub- and Superdiffusion on Self-Similar Topological Spaces // Theory of Probability and its Applications. — 2016. — V. 60, №2. — P. 173–186. WoS, SCOPUS.
DOI 10.1137/S0040585X97T987570

[A11] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О динамике стационарных процессов сдвига с канторовой структурой // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, №5. — С. 972–988. RSCI (ядро РИНЦ).

Arkashov N. S., Seleznev V. A. On the dynamics of stationary shift processes with Cantor structure // Siberian Mathematical Journal. — 2017. — V. 58, №5. — 752–764. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0037446617050020

[A12] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии // ТМФ. — 2017. — Т. 193, №1. — С. 115–132. RSCI (ядро РИНЦ).

DOI 10.4213/tmf9295

Arkashov N. S., Seleznev V. A. Formation of a relation of nonlocalities in the anomalous diffusion model // Theoretical and Mathematical Physics. — 2017. — V. 193, №1. — P. 1508–1523. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0040577917100087

[A13] Аркашов Н. С. Принцип инвариантности в форме Штрассена для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. — С. 1292–1300. WoS, SCOPUS.

DOI 10.17377/semi.2018.15.105

[A14] Аркашов Н. С. Об одном методе вероятностно-статистического анализа плотности низкочастотной турбулентной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2019. — Т. 59, №3. — С. 429–440. RSCI (ядро РИНЦ).

Arkashov N. S. On a Method for the Probability and Statistical Analysis of the Density of Low Frequency Turbulent Plasma // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — V. 59, №3. — P. 402–413. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0044466919030037

[A15] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об энергетических характеристиках процессов аномальной диффузии // ТМФ. — 2019. — Т. 199, №3. — С. 479–496. RSCI (ядро РИНЦ).

DOI 10.4213/tmf9616

Arkashov N. S., Seleznev V. A. Energy characteristics of the anomalous diffusion process // Theoretical and Mathematical Physics. — 2019. — V. 199, №3. — P. 894–908. WoS, SCOPUS.

DOI 10.1134/S0040577919060096

[A16] Аркашов Н. С. Принцип инвариантности в форме Донскера для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 1276–1288. WoS, SCOPUS.

DOI 10.33048/semi.2019.16.088

Тезисы и труды конференций

[A17] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Моделирование суб- и супердиффузии реализациями случайного блуждания на самоподобных множествах // Международная конференция по прикладному и геометрическому анализу — 2014. Тезисы. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. Самарканд, Узбекистан, 22 – 25 сентября 2014 г. С. 32.

[A18] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Об одной модели формирования нелокальностей в аномальной диффузии // Марчуковские научные чтения — 2017 (MSR 2017). Тезисы. Новосибирск: Омега Принт, 2017. Новосибирск, 25 июня – 14 июля 2017 г. С. 70.

[A19] Аркашов Н. С., Селезнев В. А. Структурирование памяти в аномальных процессах переноса // Марчуковские научные чтения — 2017 (MSR 2017): Труды Международной конференции «Марчуковские научные чтения» (25 июня — 14 июля 2017 г.). 2017. Новосибирск: ИВМиМГ СОРАН. С. 40–44.

[A20] Аркашов Н. С. Об одном методе моделирования низкочастотной турбулентной плазмы // Марчуковские научные чтения — 2019 (MSR 2019). Тезисы. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. Новосибирск, 1 – 5 июля 2019 г. С. 106–107.

[A21] Arkashov N. S. Invariance principle for partial sum processes of moving averages // IV International conference «Limit Theorems in Probability Theory and Their Applications». Book of Abstracts. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2006. Novosibirsk, 21 – 25 August 2006. P. 7–8.

[A22] Arkashov N. S., Seleznev V. A. On the energy characteristics of the anomalous transfer processes // Международная конференция по геометрическому анализу в честь 90-летия акад. Ю. Г. Решетняка. Тезисы. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. Новосибирск, 22–28 сентября 2019 г. С. 10–11.

Аркашов Николай Сергеевич

АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ДАННЫХ
АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА
Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать 18.12.2019. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Тираж 150 экз.
Печ. л. 2. Заказ N 1169.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20