АЛГОРИТМЫ В РАЗЛИЧНЫХ СМЫСЛАХ

С.К.Клини

Мэдисон, США

Эта статья дает ответ на некоторые "более специальные замечания", сделанные потенциальными участниками симпозиума и упомянутые в инструктивном письме Андрея Ершова[*].

1. Успенский спросил, можно ли понятие алгоритма "оформулировать в терминах других стандартных (скажем, теоретико-множественных) математических понятий" или же "оно по существу является независимым и первичным".

В любой ситуации, в которой принимается какая-нибудь из форм тезиса Черча, этот тезис дает эквивалент любому алгоритму. Эти эквиваленты определяются в стандартной математике. По-видимому, это обстоятельство стоит отметить, хотя оно и не дает прямого ответа на вопрос Успенского.

2. Скордев спросил: "Можно ли сформулировать сколько-нибудь подходящее обобщение тезиса Черча, которое охватывало бы вычислимость с помощью вероятностных и недетерминированных устройств?"

Для простоты я ограничусь лишь алгоритмами для функций натуральной переменной a с натуральными значениями.

Простейшим является случай, в котором недетерминированное <u>устройство</u> включается в точности один раз в каждом вычислении, выдавая натуральное число, не зависящее от вычислительной ситуации. Тогда вычисление просто задает функцию $\varphi_t(a) \simeq \varphi(a, \vartheta(t))$, где $\varphi(a, b)$ вычислимая функция от двух числовых аргументов, t - переменная, пробегающая различные "пути" или "варианты" вычисления, а $\vartheta(t)$-натуральное число, которое упомянутое устройство предоставляет при вычислении по варианту t. Имея такой алгоритм, воплощенный в функции

---

[*] См. предисловие редакторов - Прим. ред.

$\varphi(a,b)$ можно изучать распределение выходов $\varphi_t(a)$ для данного a и переменного t в зависимости от функции ϑ.

Более сложной является ситуация, когда такое устройство может включаться нуль, один или более (но, конечно, только конечное число) раз, причем вмешательства этого устройства вызываются вычислительными ситуациями, но устройство не учитывает сами эти ситуации. Мы можем осуществить эту возможность с помощью модификации машины Тьюринга с оракулом (о которой я скажу более подробно в ответе Цейтину), у которой среди конфигураций (имеющих вид <содержимое обозреваемой ячейки на ленте, состояние машины >) имеются одна или более таких, в которых действие состоит в том, чтобы задать вопрос устройству:
"Какое натуральное число Вы загадали сейчас?" В следующий момент $m + 1$ число w_t, загаданное в момент m, должно быть представлено на ленте $(w_t + 1)$-ой пометками, перед и после которых стоит по одному пробелу, причем эти $w_t + 3$ ячейки находятся непосредственно справа от ячейки, обозреваемой в момент m. При этом самая правая из $(w_t + 1)$-ой пометки обозревается машиной, а все, что было написано там, где теперь находится загаданное число, сдвигается на $w_t + 3$ ячейки вправо. Я считаю, что t пробегает некоторую область и $w_t = \vartheta(t)$, где ϑ - функция распределения для устройства. Я переделываю процедуру на середине страницы 362 моей книги "Introduction to Metamathematics" (в дальнейшем "IM")[*]. Я не собираюсь анализировать это подробно, но, по крайней мере, приведенная формулировка кажется мне приемлемой.

Аналогично (иным способом приспосабливая процедуру со стр. 362 IM) мы можем определить вычисление на машине с нулем или более ситуациями, в которых на вход устройства поступают натуральные числа $b_1, \ldots, b_n$ и устройство дает ответ $\alpha_t(b_1, \ldots, b_n)$, где функция α_t зависит недетерминированно от хода вычисления и момента запроса.

3. Цейтин проявил интерес к "относительной вычислимости".

[*] Русский перевод: С.К.Клини. Введение в метаматематику.- М.: Изд. Иностр. лит., 1957. 526 с. Страницы даны по английскому оригиналу. - Прим. перев.

Тьюринг (Proc. London Math. Soc., ser.2, 1939, v.45, p. 161-228, особенно стр. 172-173) ввел понятие машины с доступом к оракулу, который, получив на вход b, дает ответ на вопрос" Q(b)?" Тьюринг имел дело со специальным классом вопросов Q(b), названных им "теоретико-числовые вопросы". Но эту идею можно использовать для того, чтобы определить, когда произвольный теоретико-числовой предикат P(a) вычислим относительно какого-нибудь теоретико-числового предиката Q(b). Более общо, (поскольку предикаты представляются функциями, принимающими только значения 0 и 1) мы можем использовать теоретико-числовые функции $\varphi(a)$, $\psi(b)$ вместо предикатов P(a), Q(b). Поэтому мы имеем определение вычислимости одной функции φ относительно другой ψ (IM, стр. 362). Имеется эквивалент в терминах общей рекурсивности (IM, стр. 266).

Я ограничусь здесь теоретико-числовым контекстом и всюду определенными функциями ψ. (Это исключает частичные функции $\psi(b)$, которые не определены для некоторых значений b.). В связи с униформизацией, о которой пойдет речь ниже (в ответе Непейводе), эта теория далеко продвинулась вперед (напр. см. стр. 10 в Клини, Trans. Amer. Math. Soc. 1959, v. 91, p. 1 - 52).

Непейвода спросил: "Что такое алгоритмы над действительными числами?"

В Proc. Internat. Congress Math. 1950, 1, 1952, p.679-685, я рассмотрел эквивалент вычислимости $\varphi(a)$ относительно $\psi(b)$, разрешив ψ меняться, но предполагая, что таблица машины Тьюринга фиксирована. Короче, я беру в качестве $\varphi(a)$ функции "униформно", вычислимую относительно $\psi(b)$, причем ψ — переменная функция, вместо которой я предпочитаю писать α. Таким образом я определяю вычислимость функции $\varphi(a, \alpha)$ от одной числовой переменной a и одной одноместной всюду определенной функциональной переменной α. Аналогично для функций $\varphi(a_1, \ldots, a_{n_0}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1})$ с любыми n_0, n_1. В частности, при $n_0 = 0$ и $n_1 = 1$ мы получаем определение вычислимой функции $\varphi(\alpha)$ одной функциональной переменной. Фактически, я написал мою статью для конгресса 1950 г., используя эквивалентную формулировку в терминах общей рекурсивности.

Действительно, число x можно представить функцией α, дающей последовательность цифр (нулей и единиц) его двоичного разложения, если $0 \le x \le 1$, как мы и будем предполагать. (Наше обсуждение легко распространяется на общий случай, не предполагающий, что $0 \le x \le 1$.). Поэтому алгоритм, преобразующий действительные числа в натуральные, представляется вычислимой (или рекурсивной) функцией $\varphi(\alpha)$.

Если мы хотим, чтобы алгоритм давал действительное число, то значением его должно быть $\lambda a\varphi(a, \alpha)$, где φ - вычислимая функция, принимающая значения 0 или 1. Аналогично определяется алгоритм от n действительных чисел, представленных своими двоичными разложениями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

5. Скордев также спросил: "Можно ли сформулировать подходящее обобщение тезиса Черча, которое могло бы охватить вычислимость для произвольных областей объектов?"
"Произвольные области объектов" - это очень общо. Но возможно к некоторому результату может привести попытка сформулировать теорию для множеств, поскольку математики часто рассматривают множества как наиболее общие объекты.

Начнем с напоминания о том, что очень простая формулировка алгоритмов на натуральных числах содержится в переизложении моей теории 1959 и 1963 гг. (Trans. Amer. Math. Soc. v. 91, p. 1-52 и v. 108, p. 106-142), которое я представил в 1977 г. на Симпозиуме в Осло, Generalized Recursion Theory II, North - Holland Pub.Co., 1978, 185 - 222.

Пусть переменные a, b, c пробегают натуральные числа и пусть теперь $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ - наборы таких переменных (возможно пустые). Пусть Θ - список имеющихся частичных функций $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$, возможно пустой ($l = 0$) только с натуральными переменными. Функция $\lambda\mathfrak{a}\varphi(\theta, \mathfrak{a})$ частично рекурсивна относительно Θ в том и только в том случае, когда она может быть вычислена (способом, который объясняется в статье на конгрессе в Осло) с использованием конечного числа уравнений, определяющих последовательно $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ (где $\varphi_l = \varphi$), причем эти уравнения выбираются из некоторого списка схем.

Схемы возникают следующим образом. Прежде всего, нам нужны схемы, которые дают нам постоянную функцию 0 и тождественную функцию. S2.0 $\varphi(\Theta; \mathfrak{a}) \simeq 0$, S3 $\varphi(\Theta, a, \mathfrak{b}) \simeq a$

Затем, чтобы перемещаться в последовательности натуральных чисел, нам нужны схемы для функций предшествования и следования, так же как и возможность сделать выбор в зависимости от того, находимся ли мы в нуле или нет.

S 1,0 $\varphi(\Theta;\ a, \mathfrak{L}) \simeq a' = a + 1.$

S 1.1 $\varphi(\Theta;\ a, \mathfrak{L}) \simeq pd(a) = a \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a - 1, & a > 0. \end{cases}$

S 5.1 $\varphi(\Theta;\ a,\ b,\ c, \mathfrak{L}) \simeq cs(a,b,c) = \begin{cases} b, & a = 0, \\ c, & a > 0. \end{cases}$

В-третьих, нам нужно уметь осуществлять композицию вычислений, используя результат одного вычисления как аргумент для другого:

$$S\ 4.0 \quad \varphi(\Theta;\ \mathfrak{A}) \simeq \psi(\Theta;\ \chi(\Theta;\ \mathfrak{A}), \mathfrak{A}).$$

Выделенные в предшествующих схемах переменные были выбраны нами из начала списка $\mathfrak{A}$ всех переменных. Чтобы сделать это ограничение несущественным, введем схему, многократное использование которой даст нам возможность получить любую перестановку переменных

$$S\ 6.0 \quad \varphi(\Theta;\ \mathfrak{A}) \cong \psi(\Theta;\ \mathfrak{A}_1),$$

где $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{A}_1$ вынесением на первое место $(k+1)$-ой переменной. Если список Θ не пуст $(l > 0)$, то необходимо ввести функции ϑ_t для $t = 1, \ldots, l$.

$$S\ 0 \quad \varphi(\Theta;\ \mathfrak{L}, \mathfrak{L}) \cong \vartheta_t(\mathfrak{L}).$$

Наконец, обеспечим то, что в IM стр. 348 я назвал "первой теоремой о рекурсии":

$$S\ 11 \quad \varphi(\Theta;\ \mathfrak{A}) \cong \psi(\lambda \mathfrak{A} \varphi(\Theta;\ \mathfrak{A}),\ \Theta;\ \mathfrak{A})$$

$$[\cong \psi(\varphi, \Theta;\ \mathfrak{A}) \text{ - кратко }].$$

Эта схема дает абсолютно общую форму рекурсии, в которой для данных Θ и $\mathfrak{A}$ величина $\varphi(\Theta; \mathfrak{A})$ выражается через Θ, $\mathfrak{A}$ и саму функцию φ посредством ранее построенного функционала $\psi(\eta, \Theta; \mathfrak{A})$.

Позвольте мне на минуту отвлечься. Во время Симпозиума в Ургенче А.Ершов спросил меня, может ли всякая частично рекурсивная функция $\lambda \mathfrak{A}\varphi(\mathfrak{A})$ от натуральных аргументов списка $\mathfrak{A}$ быть получена применением первой теоремы о рекурсии к подходящему примитивно рекурсивному функционалу $\psi(\eta;\mathfrak{A})$ (или, в обозначениях IM, $F(\zeta;\mathfrak{A})$. Утвердительный ответ на этот вопрос дают результаты из моего доклада в Осло на симпозиуме 1977 года, если мы разрешаем подстановку константы вместо переменной после применения теоремы о рекурсии. Более общо, любая функция $\lambda\mathfrak{A}\varphi(\Theta;\mathfrak{A})$, частично рекурсивная относительно всюду определенных функций списка Θ, может быть получена с помощью первой теоремы о рекурсии при подходящей примитивно рекурсивной функции $\psi(\eta,\Theta;\mathfrak{A})$ и последующей подстановки константы вместо числовой переменной. Для того, чтобы определить примитивно рекурсивные функционалы в смысле моего доклада в Осло, я заменяю первую теорему о рекурсии (схему S11) на схему примитивной рекурсии

$$\text{S5}\quad \varphi(\Theta;\ 0,\mathfrak{B}) \cong \psi(\Theta;\mathfrak{B}),$$

$$\varphi(\Theta;\ a',\mathfrak{B}) \cong \chi(\Theta;\ a,\ \varphi(\Theta;\ a,\mathfrak{B}),\mathfrak{B}),$$

которая излишня (является производной), если имеется S11 (Осло (XII)). Как отмечено в ословской статье, (верх стр. 213), это эквивалентно старой формулировке, а утверждения (I) - (XI) из статьи в Осло справедливы для примитивной рекурсивности. Согласно теореме о нумерации (доклад в Осло (XVI)) и ее доказательству, для любого списка $\mathfrak{A}$ переменных (в нашем случае числовых переменных) и любого фиксированного списка всюду определенных функций Θ (возможно пустого) существует функция $\lambda z\mathfrak{A}\{z\}^{\Theta}(\mathfrak{A})$, которая обладает следующим свойством и которая получается применением первой теоремы о рекурсии к примитивно рекурсивному ψ: для любой частично рекурсивной $\varphi(\Theta;\mathfrak{A})$ существует число z, такое, что для всех $\mathfrak{A}$. $\varphi(\Theta;\mathfrak{A}) \cong \{z\}^{\Theta}(\mathfrak{A})$. Подставляя константу z вместо переменной z в функцию $\lambda z\mathfrak{A}\{z\}^{\Theta}(\mathfrak{A})$ полученную применением первой теоремы о рекурсии, мы достигаем желаемого результата при условии, что среди функций частично рекурсивных относительно Θ в смысле моей статьи в Осло (для всюду определенных функций Θ и числовых переменных $\mathfrak{a}$ имеются все функции, являющиеся таковыми в обычном смысле (см. напр. IM § 63). Это действительно так в силу моей теоремы о нормальной форме (IM, стр. 330), поскольку ословская теория включает примитивную рекурсию (как (XII)) и оператор минимизации (как (XIII)). (Обратно, все функции числовых переменных, частично рекурсивные относительно всюду определенных функций Θ в смысле Осло, являются таковыми в обычном смысле. Это имеет место в силу упомянутого результата, использующего первую теорему о рекурсии из IM.).

Покончив с отступлением, вернемся к сказанному выше. Добавив переменные типов 1,2,3,..., где объекты типа $j+1$ суть одноместные всюду определенные функции, аргументами которых являются объекты типа j, а значениями - натуральные числа, мы можем записать следующие схемы для $j = 1,2,3,\ldots$:

S4.j $\quad \varphi(\Theta;\mathfrak{a}) \simeq \psi(\Theta;\ \lambda\beta^{j-1}\chi(\Theta;\ \beta^{j-1},\mathfrak{a}),\mathfrak{a})$,

S6.j как S6.0, но с дополнительными переменными типа j

S7.j $\quad \varphi(\Theta;\ \alpha^{j},\ \alpha^{j-1},\mathfrak{b}) \simeq \alpha^{j}(\alpha^{j-1})$.

Далее появляется возможность использования бестиповых переменных ρ,σ,τ для множеств вместо функциональных переменных α^{j}, β^{j}, ,γ^{j} типа j для $j = 1,2,3,\ldots$ Я предлагаю заменить только что приведенные схемы следующими:

S4.s $\quad \varphi(\Theta;\mathfrak{a}) \cong \psi(\Theta;\lambda\sigma\chi\ (\Theta;\ \sigma,\ \mathfrak{a}),\mathfrak{a})$.

S6.s как S6.0, но с дополнительными множественными переменными

S7.s $\quad \varphi(\Theta;\ \sigma,\ \tau,\mathfrak{b}) \cong |\sigma \in \tau| = \begin{cases} 0, \text{ если } & \sigma \in \tau, \\ 1, \text{ если } & \sigma \bar{\in} \tau \end{cases}$

Для S4.s , ψ является функционалом $\psi(\Theta;\ \rho,\mathfrak{a})$, где ρ - множественная переменная. При вычислениях мы считаем значениями множественных переменных элементы фиксированного непустого транзитного класса U, нашего "универсума". Если при данных Θ и $\mathfrak{a}$ функция $\lambda\sigma\chi(\Theta;\ \sigma,\mathfrak{a})$ всюду определена, я интерпретирую ее как множество $\{\sigma | \chi(\Theta;\ \sigma,\mathfrak{a}) = 0\}$. Эта интерпретация мотивирует применение схемы S7.s вслед за S4.s

Детали аналогичны имеющимся в докладе на симпозиуме в Осло.

Я предлагаю рассматривать функции с $\{ \varnothing \}$ в качестве дополнительного аргумента, т.е. подставлять $\{ \varnothing \}$ вместо дополнительной переменной, где $\{\varnothing\}$ – множество, единственным элементом которого является пустое множество.

Представляет интерес вопрос о том, какие из ранее рассмотренных понятий вычислимости (в различных областях) могут быть охвачены этой формулировкой при подходящем выборе множества "универсума" U.